



# 厦门大学《高等数学 A》期中试卷

主考教师：高数(A)教学组 试卷类型：理工 A

考试日期 2009-11-28

## 一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $x=0$  是  $f(x) = e^{-\frac{[x]}{x}}$  的 ( ).  
 A. 跳跃间断点      B. 可去间断点  
 C. 无穷间断点      D. 振荡间断点
2. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + ax^2 + b}{x^2 + x + 1} - (x+1) \right) = 0$ , 则实数  $a, b$  为 ( ).  
 A.  $a=1, b=1$       B.  $a=2, b$  为任意实数  
 C.  $a=2, b=-2$       D.  $a$  为任意实数,  $b=2$
3. 方程  $x^5 + x + \sin x + q = 0$  的实根个数为 ( ).  
 A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 个数与  $q$  有关
4. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中哪一项的阶数最高 ( ).  
 A.  $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$       B.  $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$   
 C.  $e^{x^2} - \cos x$       D.  $\frac{\sin[(1-\cos x)^2] \ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$
5. 设  $x^2 y - e^{2y} = \sin y$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  ( ).  
 A.  $\frac{2xy}{\cos y + 2e^{2y}}$       B.  $\frac{2xy + e^{2y}}{\cos y - x^2}$   
 C. 0      D.  $\frac{2xy}{\cos y + 2e^{2y} - x^2}$

## 二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x^2} - 1)^{\sin x} =$  \_\_\_\_\_.
2. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \sin \ln \left( 1 + \frac{a}{x} \right) - \sin \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $f(x+1) = 2^{x^2+2x} - x$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.



4. 设  $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$ , 其中  $f$  可导. 且  $f'(0) \neq 0$ , 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 曲线  $f(x) = x^n$  在点  $P(1, 1)$  处的切线段  $PQ$ ,  $Q$  的坐标为  $(\xi_n, 0)$  ( $Q$  是过  $P$  作曲线的切线与  $x$  轴的交点), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 已知  $y = f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 且  $f'(0) = f''(0) = 2$ , 则

$$\left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{y=f(0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、计算和证明题: (每小题 8 分, 共 56 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(1-x)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$

2. 设  $y = y(x)$  由方程  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$  确定, 求  $dy$ .

3. 设  $y = x^2 \sin x$ , 求  $y^{(20)}$ .

4. 证明数列  $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots$  的极限存在, 并求极限.

5. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{2x} - 1) & x < 0 \\ a + b \sin x & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 求  $a, b$  的值.

6. 叙述并证明拉格朗日定理.

7. 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) + f(b) = 1$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ ,

$$\text{使得 } f(\xi) = \frac{1}{2}.$$

附加题: (10 分)

设  $a \in (0, 1)$   $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可导, 且在  $(0, a)$  内取到最大值和最小值,

且满足  $f(0) = 0, f(a) = a$ , 证明:

(1) 存在  $\eta \in (0, a)$  使得  $f(\eta) = a\eta$ ; (2) 存在  $\xi \in (0, a)$  使得  $f'(\xi) = a$ .