

厦门大学高等数学(理工类)期中试卷



_____学院_____系_____年级_____专业

全校(理工 A 类) 考试时间 2010.11.28

1. (24分 每小题6分) 求下列数列或函数的极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \dots + \sqrt[n]{n})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

解 (1) 因为 $1 = \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}) \leq \frac{n}{n} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}$,

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1$.

由夹逼极限准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}) = 1$.

(2) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-3x^3) \sim -3x^3$, $e^{2x}-1 \sim 2x$, $\sin x \sim x$, 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^3}{(2x)^2 \cdot x} = -\frac{3}{4}.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot e^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1+x} - \ln(1+x) = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$
 $= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2}$.

另解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} - 1}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$
 $= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{e}{2}$.

2. (24分 每小题6分) 计算下列函数的导数或微分

(1) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; (2) 设 $y = \frac{\tan x}{1+e^x}$, 求 dy ;

(3) $y = x^2 \cos 2x$, 求 $y^{(100)}$;

(4) 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{[\ln(1+t^2)]'}{(\arctan t)'} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2t)'}{(\arctan t)'} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2) = 2e^y$.

(2) $dy = \frac{(1+e^x)d \tan x - \tan x \cdot d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)\sec^2 x - \tan x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

(3) $y^{(100)} = x^2[\cos 2x]^{(100)} + 100 \cdot [\cos 2x]^{(99)}(x^2)' + \frac{100(100-1)}{2!}[\cos 2x]^{(98)}(x^2)''$
 $= 2^{100}x^2 \cdot \cos 2x + 100 \cdot 2^{99} \cdot 2x \sin 2x - 2^{98} \cdot 9900 \cdot \cos 2x$
 $= 2^{100}(x^2 \cos 2x + 100x \sin 2x - 2475 \cos 2x)$.

(4) 由 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 两边求导, 得 $1 - y' + \frac{1}{2} \cos y \cdot y' = 0$, 解得

$$y' = \frac{2}{2 - \cos y},$$

$$y'' = \frac{2(-\sin y)y'}{(2 - \cos y)^2} = -\frac{4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}.$$

3. (8分) 求函数 $y = \frac{|x| - x^2}{x(|x| - x^3)}$ 的间断点及其类型。

解 函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处没有定义, 故其间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.
 在 $x=0$ 点, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(|x| - x^3)}{|x| - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^3}{1 - x} = 0,$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty$, 故 $x=0$ 为函数 $y = \frac{|x| - x^2}{x(|x| - x^3)}$ 的无穷间断点, 属于第二类间断点. ---4分

在 $x=1$ 点, 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{x(x - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{2}$ 存在, 于是, $x=1$ 为函数

$y = \frac{|x| - x^2}{x(|x| - x^3)}$ 的可去间断点, 属于第一类间断点. ---4分

4. (12分) 问 α 取何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 (1) 连续;

(2) 可导; (3) 一阶导数连续?

解 (1) 因为当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 而 $\alpha \leq 0$ 时, 极限

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 因此, 当 $\alpha > 0$ 时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在

$x = 0$ 处连续, 从而函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续; --4分

(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$, 因此, 当 $\alpha > 1$ 时, 函数

$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$;

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$, 所以, 函数在 $x \neq 0$ 处可导, 因此, 当 $\alpha > 1$

时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导; --4分

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x})$, 因此, 当 $\alpha > 2$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0).$$

函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一阶导数连续. --4分

5. (8分) 设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$, 求证: 对任意自然数 n , $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中存在唯一的实根。

证明 作辅助函数 $F(x) = f_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1 - \cos x)^n$, 易知 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 且

$$F(0) = \frac{1}{2}, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } F(0)F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \quad \text{--2分}$$

由零点定理知, 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 存在实根. --3分

另一方面。由于

$$F'(x) = -n(1 - \cos x)^{n-1} \sin x < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

因此, 函数 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调减少, 故在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $F(x)$ 最多一个零点, 即 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 中存在唯一的实根. --3分

6. (8分) 证明恒等式: $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad (x > 1)$.

证明 令 $f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, 则当 $x > 1$ 时,

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{x^2-1} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \text{--3分}$$

因此, $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \equiv C$. --2分

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $C = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$, 故

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad (x > 1). \quad \text{--3分}$$

7. (12分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) + \xi f(\xi) = 0$.

证明 作辅助函数 $F(x) = e^{x^2/2} f(x)$, --4分

由已知条件可知, $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = e^{a^2/2} f(a) = 0$, $F(b) = e^{b^2/2} f(b) = 0$, --4分

由罗尔定理可证, 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = e^{\xi^2/2} [f'(\xi) + \xi f(\xi)] = 0$, 即 $f'(\xi) + \xi f(\xi) = 0$. --4分

8. (10分) 下面两题任选一题

(1) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

证明 因为 $f(a) = f(b)$, 且 $f(x)$ 不恒为常数, 则必存在一点 $x_1 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) \neq f(a)$. --4分

如果 $f(x_1) > f(a) = f(b)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, x_1) \subset (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > 0; \quad \text{--4分}$$

如果 $f(x_1) < f(a) = f(b)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, b) \subset (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(b)}{x_1 - b} > 0. \quad \text{--4分}$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $f'_+(a) > 0$, $f'_-(b) > 0$, $f(a) = f(b) = A$, 试证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 内至少有两个零点.

证明 由 $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 由极限的保号性, 存在 a 的一个右邻域 $(a, a + \delta_1)$,

使得对于任意的 $x \in (a, a + \delta_1)$, 都有 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 即 $f(x) > f(a) = A$; --3分

由 $f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, 由极限的保号性, 存在 b 的一个左邻域 $(b - \delta_2, b)$, 使得

对于任意的 $x \in (b - \delta_2, b)$, 都有 $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, 即 $f(x) < f(b) = A$; --3分

综上, 存在 x_1, x_2 满足 $a < x_1 < x_2 < b$, 使得 $f(x_2) < A < f(x_1)$. --2分

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 即 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 由介值定理, 存在 $c \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(c) = A$ 或 $f(a) = f(c) = f(b) = A$. --2分

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 分别在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$,

使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

因此, $f'(x)$ 在 (a, b) 内至少有两个零点.

--2 分