

厦门大学高等数学(理工类)期中试卷



_____学院_____系_____年级_____专业

全校(理工 A 类) 考试时间 2010.11.28

1. (24分 每小题6分) 求下列数列或函数的极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1}$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

2. (24分 每小题6分) 计算下列函数的导数或微分

(1) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; (2) 设 $y = \frac{\tan x}{1+e^x}$, 求 dy ;

(3) $y = x^2 \cos 2x$, 求 $y^{(100)}$;

(4) 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

3. (8分) 求函数 $y = \frac{|x|-x^2}{x(|x|-x^3)}$ 的间断点及其类型。

4. (12分) 问 α 取何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 (1) 连续;

(2) 可导; (3) 一阶导数连续?

5. (8分) 设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$, 求证: 对任意自然数 n , $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中存在惟一的实根。

6. (8分) 证明恒等式: $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad (x > 1)$ 。

7. (12分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$ 。

8. (10分) 下面两题任选一题

(1) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$ 。

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $f'_+(a) > 0$, $f'_-(b) > 0$, $f(a) = f(b) = A$, 试证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 内至少有两个零点。