

# 厦门大学《高等数学》课程期中试卷



试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2011.11.27

高等数学 A 类教学组

1. 求下列函数的极限：(每小题 4 分，共 16 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x^2+x) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x^2} \cos x\right]$$

解：(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x \sin x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1)}{x[\ln(1+x)-x]} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x)^{-1} - 1} = -2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (1 + \sin 2t + \cos t - 1)^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1}} \right]^{\frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}} = e^2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x^2+x) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x^2} \cos x\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\right] + \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cos x$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} + 1 - 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{-1} - 1}{2t} + 1 = \frac{1}{2}$$

2. 求下列数列的极限：(每小题 4 分，共 8 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right)$$

解：(1)  $\because 3 \leq (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3\sqrt[n]{3} \rightarrow 3 \quad n \rightarrow \infty, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$

(2) 法一、由拉格朗日定理，知  $\exists \xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ ，使得  $n^2 \left( \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{n}{n+1}$ ，

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{法二、} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \arctan \frac{x}{1+x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^2)^{-1} - (2x^2+2x+1)^{-1}}{2x} = 1 \end{aligned}$$

3. (10分) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

(1) 试证明此数列极限存在, 并求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;

(2) 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。

(1) 证明: 由归纳假设知,  $0 < x_n \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots$ , 又  $x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$ , 由单调有界准则可知此数列

极限存在; 令  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 则由  $x_{n+1} = \sin x_n$ , 得  $a = \sin a$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$ ;

(2) 解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ 。

4. (10分) 求函数  $f(x) = (x-2) \div [1 - e^{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}}] + \cos \frac{1}{x}$  的间断点, 并判断其类型。

解: 其间断点为  $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ 。

$\because \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  都不存在且不为  $\infty$ ,  $\therefore x = 0$  是振荡间断点;

$\because \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \cos 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + \cos 1$ ,  $\therefore x = 1$  是跳跃间断点;

$\because \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-1)}{x-3} + \cos \frac{1}{2} = 1 + \cos \frac{1}{2}$ ,  $\therefore x = 2$  是可去间断点;

$\because \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$ ,  $\therefore x = 3$  是无穷间断点。

5. (6分) 求函数  $y = \ln |\sec x + \tan x| + x^x + \arctan \sqrt{x^2 - 1}$  的导数  $\frac{dy}{dx}$  和微分  $dy|_{x=2}$ 。

解:  $\frac{dy}{dx} = \sec x + x^x (\ln x + 1) + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ ;  $dy|_{x=2} = (\sec 2 + 4 \ln 2 + 4 + \frac{\sqrt{3}}{6}) dx$

6. (10分) 已知  $f(x) = x^2 \cos 2x + \ln(1-x)$ , 试求  $f^{(20)}(x)$ 。

解:  $f^{(20)}(x) = (x^2 \cos 2x)^{(20)} + (\ln(1-x))^{(20)}$

$$= C_{20}^0 (\cos 2x)^{(20)} x^2 + C_{20}^1 (\cos 2x)^{(19)} \cdot 2x + C_{20}^2 (\cos 2x)^{(18)} \cdot 2 - 19! (1-x)^{-20}$$

$$= 2^{20} (x^2 \cos 2x + 20x \sin 2x - 95 \cos 2x) - 19! (1-x)^{20}$$

7. (10分) 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+b)\sin x + 2\ln(1-x)}{x} & x > 0 \\ e^{ax} - 1 & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 试求出  $a$  和  $b$ 。

解: 由  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ 以及 } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(a+b)\sin x + 2\ln(1-x)}{x} = 0 \text{ 以及 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(a+b)\sin x + 2\ln(1-x)}{x^2} = a$$

$$\text{故 } a+b=2 \text{ 以及 } a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sin x + 2\ln(1-x)}{x^2} = -1, \therefore a = -1, b = 3.$$

8. (10分) 设函数  $y = f(x)$  的极坐标式为,  $\rho = a\theta$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\pi}$  及  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{\theta=0}$ 。

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2\cos \theta - \theta \sin \theta)(\cos \theta - \theta \sin \theta) - (-2\sin \theta - \theta \cos \theta)(\sin \theta + \theta \cos \theta)}{a(\cos \theta - \theta \sin \theta)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\pi} = \pi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{2}{a}.$$

9. (10分) 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  都是二阶可导, 并且  $g(x)$  为  $f(x)$  的反函数, 已知  $f(0) = 1$ ,

$$f'(0) = 2, f''(0) = 8, \text{ 求 } g'(1) \text{ 及 } g''(1).$$

解一: 由  $f(g(x)) = x$ , 两边对  $x$  求导, 可得  $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$  (1)

$$\text{把 } x=1 \text{ 代入 (1) 式, 得 } g'(1) = \frac{1}{2};$$

$$\text{再次对 (1) 式两边 } x \text{ 求导, 得 } f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) = 0 \quad (2)$$

$$\text{把 } x=1 \text{ 代入 (2) 式, 得 } g''(1) = -1.$$

解二:  $g(x)$  为  $f(x)$  的反函数, 则  $g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$ , 从而  $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ .

$$g''(y) = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}, \text{ 从而 } g''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -1.$$

10. (10分) 以下两题任选其一 (仅做一题)

(1) 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) + f(2) = 0$ , 证明: 至少

存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

(2) 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导,  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(2) = 2$ , 证明: 至少

存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$ 。

解: (1)  $\because f(1) + f(2) = 0$ , 由介值定理, 知  $\exists \xi_1 \in [1, 2]$ , 使得  $f(\xi_1) = 0$ 。

令  $\varphi(x) = e^{-x} f(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导, 且  $\varphi(0) = \varphi(\xi_1) = 0$ ,

由罗尔定理, 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

(2) 令  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ,  $x \in [1, 2]$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导, 且  $\varphi(1) = \varphi(2) = \frac{1}{2}$ ,

由罗尔定理, 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$ 。

附加题 (10 分)

依次求解下列问题

(1) 证明方程  $e^x + x^{2n+1} = 0$  有唯一的实根  $x_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );

(2) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求其值  $A$ ;

(3) 证明当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n - A$  与  $\frac{1}{n}$  是同阶无穷小。

证: (1) 令  $f_n(x) = e^x + x^{2n+1}$ , 则  $f_n(0) = 1 > 0$ ,  $f_n(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ ,

由连续函数的零点定理知, 对任意给定的自然数  $n$ , 均存在  $x_n \in (-1, 0)$ , 使得  $f_n(x_n) = 0$ ,

又因为  $\frac{df_n(x)}{dx} = e^x + (2n+1)x^{2n} > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 所以函数  $f_n(x)$  关于  $x$  严格单调增加,

故函数  $f_n(x) = e^x + x^{2n+1}$  有唯一的实根  $x_n$ , 即对任意给定的自然数  $n$ , 方程  $e^x + x^{2n+1} = 0$  有唯一的实根  $x_n$ 。

(2) 由于  $e^{x_n} + x_n^{2n+1} = 0$ , 即  $x_n = -e^{\frac{x_n}{2n+1}}$ , 因为  $|x_n| \leq 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2n+1} = 0$ ,

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{x_n}{2n+1}} = e^0 = 1$ , 故  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ 。

(3) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - A}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-e^{\frac{x_n}{2n+1}} + 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x_n}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ , 故  $x_n - A$  与  $\frac{1}{n}$  是同阶无穷小。

上式用到了  $e^{\frac{x_n}{2n+1}} - 1 \sim \frac{x_n}{2n+1}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 的等价无穷小代换。