



厦门大学《高等数学》课程期中试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2011.11.27

高等数学 A 类教学组

1. 求下列函数的极限：(每小题 4 分，共 16 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x^2+x) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x^2} \cos x\right]$$

2. 求下列数列的极限：(每小题 4 分，共 8 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}\right)$$

3. (10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

(1) 试证明此数列极限存在，并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(2) 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。

4. (10 分) 求函数 $f(x) = (x-2) \div [1 - e^{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}}] + \cos \frac{1}{x}$ 的间断点，并判断其类型。

5. (6 分) 求函数 $y = \ln |\sec x + \tan x| + x^x + \arctan \sqrt{x^2-1}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和微分 $dy|_{x=2}$ 。

6. (10 分) 已知 $f(x) = x^2 \cos 2x + \ln(1-x)$ ，试求 $f^{(20)}(x)$ 。

7. (10 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+b) \sin x + 2 \ln(1-x)}{x} & x > 0 \\ e^{ax} - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求出 a 和 b 。

8. (10 分) 设函数 $y = f(x)$ 的极坐标式为 $\rho = a\theta$ ，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\theta=0}$ 。

9. (10 分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是二阶可导，并且 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，已知 $f(0) = 1$,

$f'(0) = 2, f''(0) = 8$ ，求 $g'(1)$ 及 $g''(1)$ 。

10. (10分) 以下两题任选其一 (仅做一题)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, $f(0)=0$, $f(1)+f(2)=0$, 证明: 至少存在 $\xi \in (0,2)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

(2) 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=2$, 证明: 至少存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$ 。

附加题 (10分)

依次求解下列问题

(1) 证明方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 有唯一的实根 x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$);

(2) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值 A ;

(3) 证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n - A$ 与 $\frac{1}{n}$ 是同阶无穷小。