



厦门大学《高等数学 B》期中试卷

_____学院_____系_____年级_____专业

主考教师：高数 B 组

考试日期：2012. 11. 24

一、(8 分)用函数极限的" $\varepsilon - \delta$ "语言证明 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$.

解：欲使 $\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| = |x + 1| < \varepsilon$ ，则要 $|x - (-1)| < \varepsilon$.

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ ，当 $|x - (-1)| < \varepsilon$ 时，恒有 $\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| < \varepsilon$ ，

亦即 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$.

二、(每小题 5 分，共 20 分)求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$.

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{1}{2}$

或用洛必达法则.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$.

解：令 $t = x - 1$ ，原式 = $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t(t+2)}{\sin \pi(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2)}{\sin \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2)}{\pi t} = \frac{2}{\pi}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \cot(x^2 - 1)$.

解： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1+1) \cos(x^2-1)}{\sin(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cos(x^2-1)}{(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x^2-1)}{x+1} = \frac{1}{2}$.

(4) 设 $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+n}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$

三、(6分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right).$

解: $\because \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 1, \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$

四、(8分) 求 $f(x) = \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点, 并判别其类型.

解: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \sin 1, x = -1$ 为第一类可去间断点;

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, x = 1$ 为第二类无穷间断点;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, x = 0$ 为第一类跳跃间断点.

五、(8分) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 非负, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$\forall l (0 < l < 1), \exists \xi \in [0,1],$ 使得: $f(\xi) = f(\xi+l).$

证明: 作辅助函数 $F(x) = f(x) - f(x+l),$ 则 $F(0) = -f(l) < 0, F(1-l) = f(1-l) > 0,$ 由

$F(0), F(1-l)$ 异号 $\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1-l), s.t., F(\xi) = 0.$

六、(每小题 6 分, 共 18 分) 求下列导数

(1) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}),$ 求 $y'.$

解: $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} [e^x + \sqrt{1+e^{2x}}]' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} [e^x + \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} (1+e^{2x})']$
 $= \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} [e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}] = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

(2) $y = \cos^2 3x,$ 求 $\frac{d^n y}{dx^n} (n \geq 1).$

解: $y = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x), y^{(n)} = \frac{6^n \cos(6x + \frac{n\pi}{2})}{2}$.

(3) $yf'(x) + xf(y) = x^2$, f 可导, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 两边同时求微分可得 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - f(y) - yf'(x)}{f(x) + xf'(y)}$. (或两边同时对 x 求导)

七、(6 分) 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的二阶导数

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{t}{2}; \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{1+t^2}{4t}$.

八、(8 分) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 可导, 并求 $f'(x)$.

解: $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & x = 1, a = 2, b = -1, f'(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases} \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

求解 a, b 时, 要求用导数定义证明。先得到 $a+b=1$, 所以 $f(1)=1$, 再用

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(ax-b) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1) - (a+b) - f(1)}{x-1}$$

, 得到 $1+1=a$ 即可。

九、(8 分) 设 $f(x) = \phi(a+bx) - \phi(a-bx)$, 其中函数 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $\phi'(a)$ 存在, 求 $f'(0)$.

解: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\phi(a+bx) - \phi(a-bx)] - [\phi(a) - \phi(a)]}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\phi(a+bx) - \phi(a)] - [\phi(a-bx) - \phi(a)]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} b \frac{[\phi(a+bx) - \phi(a)]}{bx} + \lim_{x \rightarrow 0} b \frac{[\phi(a-bx) - \phi(a)]}{-bx} = 2b\phi'(a).$$

