4月21日

§9.8 多元函数的极值及其求法

一. 多元函数极值及最大值与最小值.

二. 条件极值. 拉格朗日乘数法

以下叙述时, 我们以例15为例 阐述这里的思想方法.

一般问题: 求目标函数 $u=f(x,y,z)$

在条件 $G(x,y,z)=0$ 下的极值.

方法一: 由条件 $G(x,y,z)=0$ 确定一个隐函数

$z=z(x,y)$.

代入目标函数中.

考虑 $u=f(x,y,z(x,y))$ 的无条件极值问题.

例15: $S=2(xy+yz+xz)$

在条件 $xyz=2$ 下的最小值问题

解: 需要求 $\frac{\partial S}{\partial x}$, 以及 $\frac{\partial S}{\partial y}$. ($S$是$x,y$的二元函数)

其中 z是x,y的二元隐函数, 由$xyz=2$决定.

因此 ① 先由 $xyz=2$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

分别对x, 对y求导, z是x,y的二元函数

$$\begin{cases} y\left[1\cdot z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{x} \\ x\left[1\cdot z+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y} \end{cases}$$

② 再对 $S=2(xy+yz+xz)$

分别对x, 对y求导, z是x,y的二元函数

$$\frac{\partial S}{\partial x}=2\left[y+y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+1\cdot z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$=2\left[y-\frac{yz}{x}\right]=0 \quad\Rightarrow z=x$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2\left[x + 1\cdot z + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$
$$= 2\left[x - \frac{xz}{y}\right] = 0 \Rightarrow z = y$$

$$\left.\begin{aligned} z &= x \\ z &= y \\ xyz &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{2} \quad 为唯一驻点$$

同样 根据实际问题，一定有最小值. 则上述唯一驻点为最小值点.

一般问题：求目标函数 $u = f(x,y,z)$
在条件 $G(x,y,z) = 0$ 下的极值.

方法二：设 $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda G(x,y,z)$
称之为拉格朗日函数

这个方法的思想很简单. 可能的极值点由这个拉格朗日函数的所有偏导数（有四个）都等于0决定. 在实际问题中，如果得到唯一的 (x_0, y_0, z_0) 为可能极值点，则从实际问题意义来判断其为最大值（或最小值）点.

例5： $S = 2(xy + yz + xz)$
在条件 $xyz = 2$ 下的最小值问题

解：设 $L(x,y,z,\lambda) = 2(xy+yz+xz) + \lambda(xyz-2)$

$$\begin{cases} L_x = 2y + 2z + \lambda yz = 0 & \Rightarrow \dfrac{y+z}{yz} = -\dfrac{\lambda}{2} \\ L_y = 2x + 2z + \lambda xz = 0 & \Rightarrow \dfrac{x+z}{xz} = -\dfrac{\lambda}{2} \\ L_z = 2y + 2x + \lambda xy = 0 & \Rightarrow \dfrac{x+y}{xy} = -\dfrac{\lambda}{2} \\ L_\lambda = xyz - 2 = 0 & \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = y = z$，再代入 $L_\lambda = 0$，

$\Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{2}$ 为唯一的可能极值点.

同样 根据实际问题，一定有最小值. 则上述点为最小值点.

注：例15 所对应的一般问题如下:

例15. 求体积为V 而表面积最小的长方体的表面积.

而 P118 例17 所对应的一般问题如下:

例17. 求表面积为S 而体积最大的长方体的体积.

数学上称这两者为对偶问题. 这两者的最值点实际上相同，也即最终都是正方体.

并且有:

若已经得到例15 问题解

例15. 求体积为a^3 而表面积最小的长方体的表面积.

即：最佳边长为 a ，最小表面积为 $6a^2$

则立刻得到如下例17 问题的解:

例17. 求表面积为 $6a^2$ 而体积最大的长方体的体积.

即：最佳边长依旧为 a ，并且最大体积恰好为 a^3.

注：对于非实际问题，或者说纯数学问题，建议用方法一. 也即转化为无条件极值问题.

对于纯数学问题，还需要判别驻点是否为极值点.

例如，还是例15，不清楚该问题实际背景时，

解决以下纯数学问题时:

求函数 $S=2(xy+yz+xz)$ ，$x,y,z>0$

在条件 $xyz=2$ 下的最小值问题

解：前面已经得到

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}, & \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y} \\ \frac{\partial S}{\partial x} = 2\left[y - \frac{yz}{x}\right], & \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left[x - \frac{xz}{y}\right] \end{cases}$$

以及驻点 $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt[3]{2}$

还需要继续求

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 - 2y\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + z\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = 4\frac{yz}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} = 2 - \frac{2}{x}\left[1\cdot z + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0 - 2x\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + z\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right] = 4\frac{xz}{y^2}$$

在驻点 $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt[3]{2}$ 上，

$A = 4$， $B = 2$， $C = 4$

也即 $AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0$， $A > 0$

在唯一驻点处取得极小值，也为最小值.

除了上述方法外，如果条件本身可以解出某个变元的显示解，也即用其它变元表示该变元. 则可以将此变元直接用显示解替换.

还是这个例子，

求函数 $S = 2(xy + yz + xz)$， $x, y, z > 0$

在条件 $xyz = 2$ 下的最小值问题

解：由 $xyz = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{xy}$ 代入 S 中

$$S = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)$$

这种方法就是例5一开始时的方法.

只不过在纯数学问题中，还需要继续判别驻点是否为极值点.

我们已经得到：

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right), \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right)$$

以及唯一的驻点 $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2}$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{8}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{8}{y^3}$$

在唯一驻点 $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2}$，仍然有

$A = 4$, $B = 2$, $C = 4$.

也即 $AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0$, $A > 0$

在唯一驻点处取得极小值，也为最小值.

作业：P121

2, 4, 5, 8, 10

第10章 重积分

§10.1 二重积分的概念与性质

一. 二重积分的概念

引例1 曲顶柱体的体积

直接与一个二元函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$

联系在一起.

对于这个二元函数. 假设定义域 D 为有界闭区域.

并且 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续, 且假设

$f(x,y)\geq 0$, $(x,y)\in D$.

这个曲顶柱体定义为: P135 图 10-1

底: xOy 面上的闭区域 D

侧面: 以 D 的边界曲线为准线

母线平行于 z 轴的柱面.

顶: 曲面 $z=f(x,y)$.

这个曲顶柱体是由这个二元函数

$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$

完全决定.

例如: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leq R^2$

此时的曲顶柱体即为上半球体.

底: xOy 面上的区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq R^2\}$

圆区域

顶: 曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

上半球面.

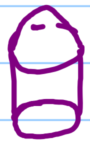
侧面： 柱面 $x^2+y^2=R^2$

只是在这个曲顶柱体中，没有侧面.

我看该侧面最合理化为

xoy面上的一条曲线 $x^2+y^2=R^2$.

简单修改，使其有侧面.



$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+1,\quad x^2+y^2\le R^2$$

现在要求 由函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$

所决定的曲顶柱体的体积

方法：就是将这个曲顶柱体切割成很多个

小曲顶柱体.

曲顶柱体可以由二元函数决定.

小曲顶柱体也是如此，而且是同一个二元函数.

只是现在定义域不再是 D，而是 D 内的小区域

也就是说，分割曲顶柱体，实际上是分割区域 D.

将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，同时也用它表示该小闭区域的面积

于是小曲顶柱体表示为 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in\Delta\sigma_i$

现在要求小曲顶柱体的体积，该体积可以近似求.

在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

这就是这个小曲顶柱体的近似体积.

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

这就是整个曲顶柱体的近似体积

当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，

如果该和式的极限存在，

则极限值即为整个曲顶柱体的体积

数学上，则称为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分.

定义： 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.

将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，同时也用它表示该小闭区域的面积

在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，

如果该和式的极限存在，

则称此极限为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分.

记为 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

即 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

积分和

积分区域　被积函数　面积微元

被积表达式

积分变量

根据这个定义，引例1 由二元函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

所表示的曲顶柱体的体积为

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

特别地，如果 $z=h$，$(x,y)\in D$

表示以 D 为底，高为 h 的平顶柱体

此时的体积为 $\iint_D h\,d\sigma = h\cdot D$ 的面积

因此，

在这个 二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$

所表示的曲顶柱体 中

这个二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 也可以称为

这个曲顶柱体的高度函数.

再看这个定义式：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

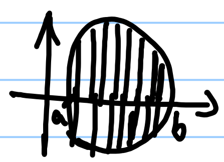
如果特别地，取 $\Delta\sigma_i=\frac{1}{n}\cdot D$ 的面积

则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\right]\cdot D$ 的面积

"平均高度"$\cdot D$ 的面积

实际应用：山洞容积

水库蓄水量.



水深函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$