4月24日

第10章 重积分

§10.1 二重积分的概念与性质

一. 二重积分的概念

引例1 曲顶柱体的体积

有界闭区域D上的二元连续非负函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

对应为 以平面xoy面上的有界闭区域D为底
以曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 为顶
的曲顶柱体.

这样的曲顶柱体的体积计算引出了二重积分的定义.

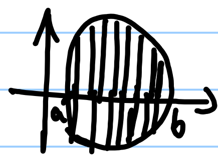
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

如果特别地，取 $\Delta\sigma_i=\frac{1}{n}\cdot D$的面积

则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\right]\cdot D$的面积

"平均高度"$\cdot$ D的面积

实际应用：山洞容积
水库蓄水量.



水深函数 $z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$

引例2 求非均匀平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，

面密度函数 $z=\rho(x,y)>0$，连续

在均匀情况下，即 $z\equiv\rho_0$，ρ_0 为常数.

则质量 = 面密度 × 面积 = $\rho_0\cdot D$ 的面积.

在一般情况下，

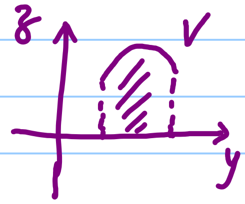
则质量为 $\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma$.

继续回到引例1. 二重积分的几何意义

(1) 高度函数 $f(x,y)\geqslant 0$，

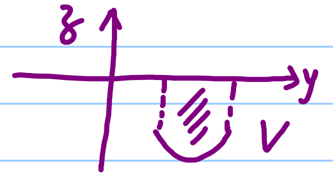
$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = V$$

$x=x_0$ 截面图



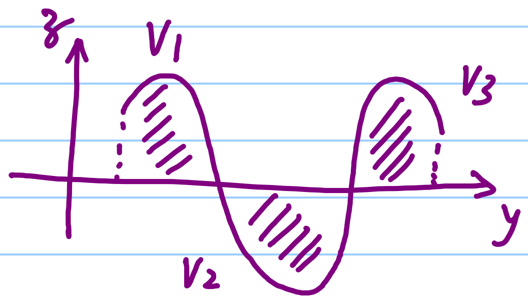
(2) 高度函数 $f(x,y)\leqslant 0$，

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = -V$$



(3) 一般高度函数 $f(x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = V_1 - V_2 + V_3$$



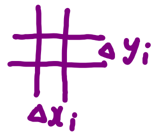
对二重积分定义的说明:

(1) 若 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 存在，则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积

性质：若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

从而，假定被积函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

(2) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则二重积分的值与区域 D 的分割无关. 因此，在直角坐标系中，



$$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

$$d\sigma = dx\,dy$$

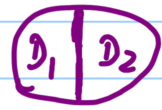
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

二. 性质：D为有界闭区域

性质1. $\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,d\sigma$

$$= \alpha \iint_D f(x,y)\,d\sigma + \beta \iint_D g(x,y)\,d\sigma$$

性质2. 如果闭区域D可被曲线分为两个没有公共内点的闭子区域D_1和D_2,



$D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2为闭区域

$D_1 \cap D_2$上的点为D_1, D_2的公共边界点

被重复计算都无影响积分值

则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma$

性质3. ① $f(x,y)=1$, $(x,y)\in D$

$$\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma = D\text{的面积}$$

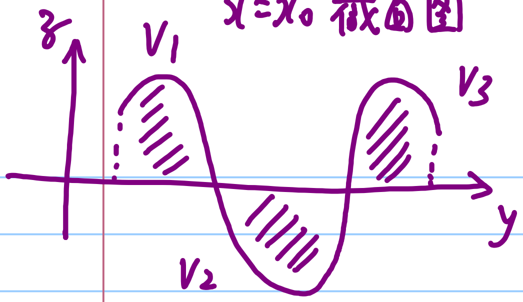
② $f(x,y)=h$, $(x,y)\in D$

$$\iint_D h\cdot d\sigma = h\cdot\sigma = \text{平顶柱体体积}$$

性质4. $f(x,y) \le g(x,y)$, $(x,y)\in D$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le \iint_D g(x,y)\,d\sigma$$

特别地 $\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$



$|V_1-V_2+V_3| \le V_1+V_2+V_3$

|代数和| ≤ 和

性质5. $m \le f(x,y) \le M$, $(x,y)\in D$

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le M\sigma$$

估值不等式

性质6. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则在 D 上至少存在 (ξ,η)，

使得 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma$

中值定理

曲顶柱体中，$f(\xi,\eta)$ 称为平均高度.

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\right]\cdot D\text{ 的面积}$$

"平均高度" · D 的面积

↓

实际中，用近似.

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$ 精确的平均高度.

一般问题中，称之为 $f(x,y)$ 在 D 上的平均值.

例1 估计 $I=\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$.

解：使用估值不等式，因此要求被积函数

$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$ 在有界闭区域 D 的最值.

上一章里谈过这个问题，但一般问题本身很复杂.

但这里比较简单.

设 $u=x+y$，则 $\frac{1}{\sqrt{u^2+16}}$ 在 $0\le u\le 3$ 内的最值

$$m=\frac{1}{\sqrt{3^2+16}}=\frac{1}{5}，\quad M=\frac{1}{\sqrt{0^2+16}}=\frac{1}{4}$$

区域 D 的面积 $\sigma=2$

则 $\frac{2}{5}=m\sigma\le I\le M\sigma=\frac{1}{2}$

作业： P139-140

2，3，5(2)，6(1)

§10.2 二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

在第六章中计算"平行截面面积为已知的立体的体积"方法中，实际上我们上课时已经提到了二重积分的计算。这里我们不再阐述，参见当时板书或者本书教材叙述。

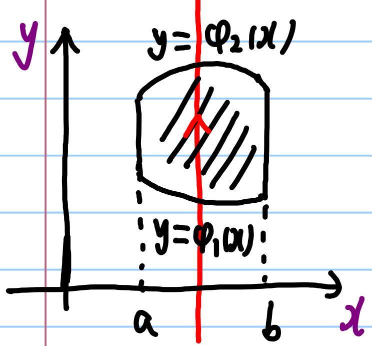
以下我们是从公式理解记忆来阐述二重积分计算。

回顾§10.1节性质3

$$\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma = D\text{的面积}$$

这实际上是在计算D所表示的平面图形的面积。而平面图形的面积计算实际上是定积分的应用问题。考虑两种类型的平面图形

(一) X-型



上方曲线 $y=\varphi_2(x)$

下方曲线 $y=\varphi_1(x)$

共同的定义域为 $x\in[a,b]$

则 D的面积 $=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$

这个积分区域D称之为X-型，表示为

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}.$$

再回到§10.1节性质3. $\iint\limits_D 1\,d\sigma$ = D的面积

也即有,

$$\iint\limits_D 1\,dxdy = \int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dy\right] dx$$

对于一般问题，设积分区域为X-型，即

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}.$$

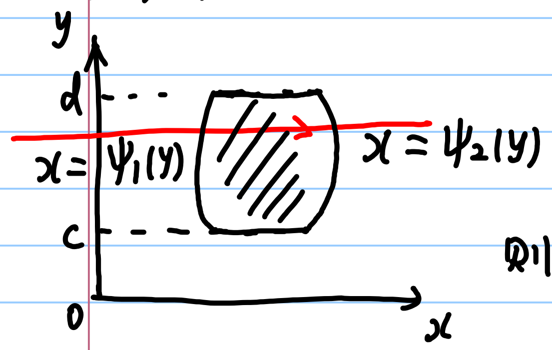
则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$

$$\triangleq \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

这就是积分区域为X-型的二重积分计算公式

称之为 先对y后对x的二次积分.

(二) Y-型



右方曲线 $x=\psi_2(y)$

左方曲线 $x=\psi_1(y)$

共同的定义域 $y\in[c,d]$

则D的面积 $=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\,dy$

这个积分区域D称之为Y-型，表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$$

$$\iint\limits_D 1\,dxdy = \int_c^d [\psi_2(y)-\psi_1(y)]\,dy$$
$$= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} 1\,dx\right] dy$$

对于一般问题，设积分区域 D 为 Y-型，表示为

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$

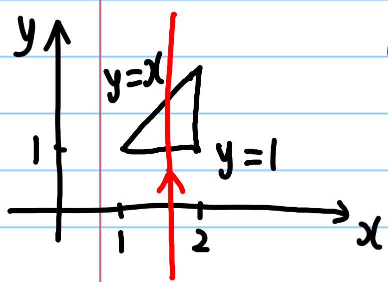
$$\triangleq \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

这就是积分区域为Y-型的二重积分计算公式

称之为 先对 x 后对 y 的二次积分.

例1. 计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$.

其中 D 是直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.



(一) 上方曲线 $y=x$

下方曲线 $y=1$

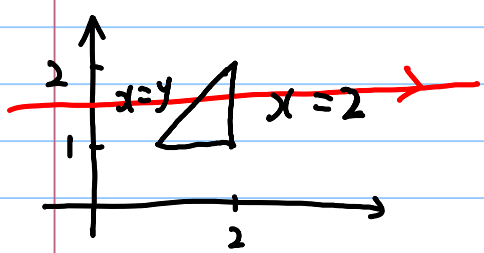
其间定义域 $x\in[1,2]$

$$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 1\le y\le x\}$$

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy$$

$$=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=1}^{x}\,dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\,dx=\cdots=1\frac{1}{8}$$



(二) 右方曲线 $x=2$

左方曲线 $x=y$

其间定义域 $y\in[1,2]$

$D=\{(x,y)\mid 1\le y\le 2,\ y\le x\le 2\}$

$$\iint_D xy\,d\sigma = \int_1^2 dy\int_y^2 xy\,dx$$

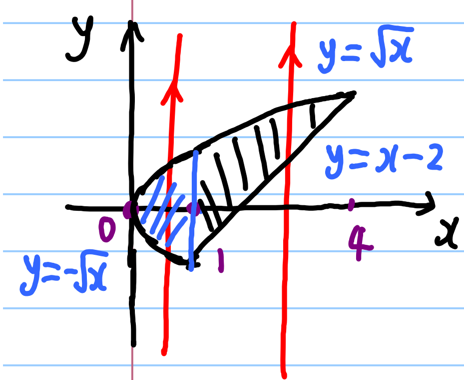
$$=\int_1^2 y\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=y}^{2}\,dy$$

$$=\int_1^2 \left[2y-\frac{1}{2}y^3\right]dy = \cdots = 1\frac{1}{8}.$$

如何将一个积分区域表示成X-型，或Y-型？
实际中选择X-型还是Y-型？

例13. $\iint_D xy\,d\sigma$，D由 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 所围成

解：(一) X型

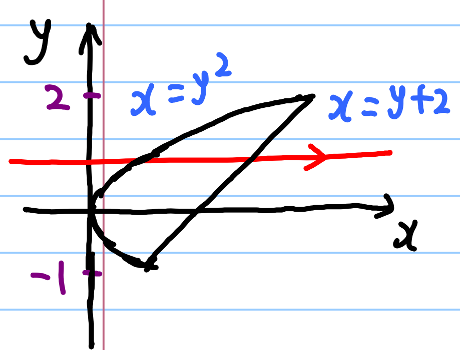


$D=D_1\cup D_2$

$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$

$D_2=\{(x,y)\mid 1\le x\le 4,\ x-2\le y\le\sqrt{x}\}$

(二) Y型



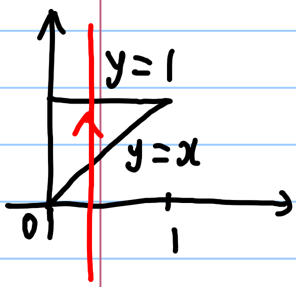
$D=\{(x,y)\mid -1\le y\le 2,\ y^2\le x\le y+2\}$

$$\iint_D xy\,d\sigma$$

$$=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$$

$$=\cdots=\frac{45}{8}$$

例. $\iint\limits_D e^{y^2}dxdy$，$D$ 由 $y=x$，$y=1$ 及 y 轴所围.

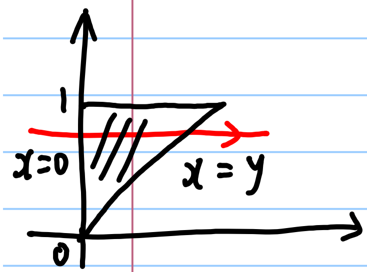


$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$$

$$\iint\limits_D e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$$

但 $\int_x^1 e^{y^2}dy$ 所对应的被积函数 e^{y^2} 的原函数不能用初等函数表示

因此这样的积分次序不行



$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$$

$$\iint\limits_D e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 e^{y^2}\cdot(y-0)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}\,d(y^2)$$

$$=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_{y=0}^{1}=\frac{1}{2}(e-1)$$

教材 P144 例12 也类似. 只是这里的例只能用Y型.

而教材例12：Y型计算比X型计算要复杂.

积分次序的选择：

首先是可计算，更容易求积分；

其次在同等求积分难度下，积分区域的表示更简单的.

作业：P156-158：

1(2)(3)；2(2)(3)；4(1)(3)；5；

6(1)(3)(4)；8；10

二、利用极坐标计算二重积分

这里，我们不采用教材的推导方法，而是通过"*三、二重积分的换元法"来推导，尽管二重积分的换元法不作考试要求。

主要目的：多了解积分计算的一种方法，进一步加深对定积分的换元法理解，得到二重积分、三重积分更多的计算方法。