4月26日（第11周）

§10.2 二重积分的计算法

一. 利用直角坐标计算二重积分

二. 利用极坐标计算二重积分

这里我们通过"二重积分的换元法"来推导

首先，回顾定积分的换元法：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，且 $a\le\varphi(t)\le b$

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，

则有 $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

在实际使用中，常常假设 $x=\varphi(t)$ 是严格单调的。

① 若假设 $x=\varphi(t)$ 是严格单调增加的。$\varphi'(t)\ge 0$

则该变换将 x 轴上的积分区域 $[a,b]$ 一一对应变为 t 轴上的积分区域 $[\alpha,\beta]=[a',b']$，$a'<b'$

则 $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a'}^{b'} f[\varphi(t)]\,|\varphi'(t)|\,dt$$

② 若假设 $x=\varphi(t)$ 是严格单调递减的。$\varphi'(t)\le 0$

则该变换将 x 轴上的积分区域 $[a,b]$ 一一对应变为 t 轴上的积分区域 $[\beta,\alpha]=[a',b']$，$a'<b'$

则 $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

$$=\int_{b'}^{a'} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_{a'}^{b'} f[\varphi(t)]\,|\varphi'(t)|\,dt$$

现在将定积分的换元积分法修改为:

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 变换 $x=\varphi(t)$

将 x 轴上的积分区域 $[a,b]$ 一一对应变为

t 轴上的积分区域 $[a',b']$, 其中 $a'<b'$.

其中 $\varphi(t)$ 在 $[a',b']$ 上具有连续导数,

则有 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} f[\varphi(t)]\,|\varphi'(t)|\,dt$

这种换元法的叙述术:

① 积分区域: 用 x 表示的 $[a,b]$, 也即 $a\le x\le b$

$\longrightarrow$ 用 t 表示的 $[a',b']$, 也即 $a'\le t\le b'$.

(积分上限总是大于积分下限, 正常定积分定义)

② 被积函数: $f(x) \to f(\varphi(t))$

③ 微元: $dx \to |\varphi'(t)|\,dt$

(多了一个绝对值符号)

由此, 我们推广得到

二重积分的一般换元法: (P152)

设函数 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的有界闭区域 D 上连续,

变换 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 一一对应变为

xOy 平面上的闭区域 D,

其中函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在 D' 上有一阶

连续偏导数, 且在 D' 上雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中| |表示行列式

则有 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$

其中| |表示绝对值.

这里换元法也包含三个换元步骤

① 积分区域：由 (x,y) 表示的积分区域 D

$\rightarrow$ 由 (u,v) 表示的积分区域 D'

② 被积函数：$f(x,y) \rightarrow f(x(u,v),\ y(u,v))$

③ 面积元素：$dxdy \rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

现在应用到极坐标变换 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

则 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \geq 0$ (仅在极点处 $\rho=0$)

$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$

而在极坐标变换中，积分区域通常采用的表示方法是：图形保持不变，变的是坐标系，也即从直角坐标系变换到极坐标系. (教材角度保持用D符号)

或者简单地说，极坐标系下的积分区域表示法又回到了上册第六章计算平面图形面积用极坐标表示平面图形：

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta),\quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

(通过画一组射线 $\theta=\theta_0$ $(\alpha\le\theta_0\le\beta)$，
从内部曲线 $\rho=\varphi_1(\theta)$ 进入区域
从外部曲线 $\rho=\varphi_2(\theta)$ 离开区域)

特别地，有以下两种特殊情形

(1) $0\le\rho\le\varphi(\theta)$， $\alpha\le\theta\le\beta$， (过极点)

(其中 $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$，两个等号不能同时取到)

(2) $0\le\rho\le\varphi(\theta)$， $0\le\theta\le 2\pi$ (包含极点)

我们再次看到平面图形面积问题与其对应积分区域上二重积分的联系. 从这个层面上，可以反过来去加强理解记忆极坐标下平面图形面积公式. 也即

依旧按§10.1 性质3，计算极坐标系中

$$\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta$$

所表示的平面图形面积 A.

$$A=\iint_D dxdy=\iint_{D'}\rho\,d\rho\,d\theta$$

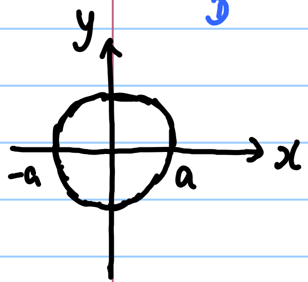
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\rho\,d\rho$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2\Big|_{\rho=\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\left[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)\right]d\theta.$$

这是我们第六章所得到的结果.

例5. $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=a^2$ 所围.



解：极点在积分区域内部.

$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 同一条曲线

代入到圆方程 $x^2+y^2=a^2$ 不同的坐标方程

得到圆方程的极坐标表示 $\rho=a$

D: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$

则 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2} \rho\, d\rho$

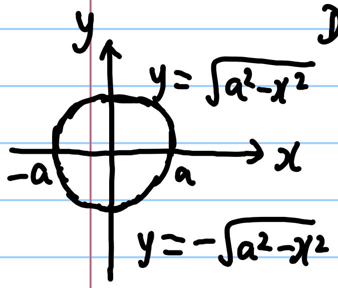
$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{a} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2}\right) = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

如果用直角坐标系，



$D = \{(x,y) \mid -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\}$

$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy$$

但 $\int e^{-y^2} dy$ 对应的被积函数 e^{-y^2} 的原函数无法用初等函数表示. 也即该方法不适用.

例1. 计算概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

解: 另一种方法 (不是很严谨的方法, 严谨方法见教材 P150)

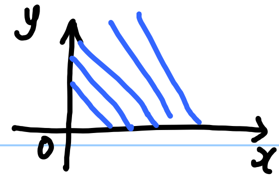
$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (广义积分)

$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$= \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, (广义二重积分)

其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x < +\infty,\ 0 \le y < +\infty\}$ (矩形区域)

采用极坐标 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$



则 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho<+\infty\}$

$$\Rightarrow I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$$ (过极点)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\left(-\frac{1}{2}\right)d(-\rho^2)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{+\infty}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)[0-1]\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

则 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

由此推得概率论中很重要一种分布，标准正态分布的密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $-\infty<x<+\infty$

的广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1$

作业：

11 (1) (2); 12 (2) (3); 13 (1) (4)

14 (1) (3); 15 (1) (4)

§10.3 三重积分

一、三重积分的概念

我们依旧可以从质量问题引出三重积分
在二重积分中，考虑的是平面薄片的质量
而在三重积分中，考虑的是空间立体的质量.

在二重积分中，

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

面密度 $f(x,y)$

↓

密度 $f(x,y,z)$

在三重积分中，

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

类似地，也是通过三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域 Ω 分割，来进行定义.

具体定义见教材 P160

同样地，在直角坐标系中，体积微元 $dv=dx\,dy\,dz$.

则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

三重积分的物理意义：

密度为 $f(x,y,z)$ 的空间立体 Ω 的质量为

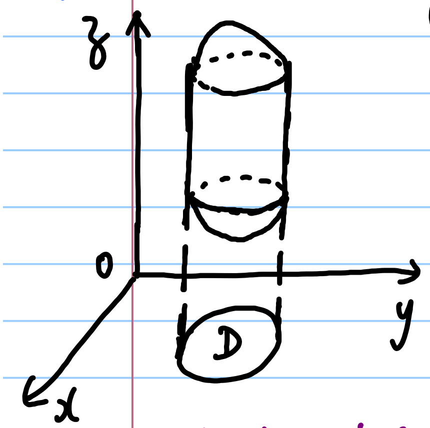
$$M=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv.$$

特别地，$f(x,y,z)\equiv \rho_0$，ρ_0 为常数.

则 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho_0\,dv=\rho_0\cdot\iiint\limits_{\Omega}dv=\rho_0\cdot V$

其中 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv$ 表示为空间立体 Ω 的体积.

现在来看如何从二重积分的角度来计算空间立体 Ω 的体积.



这个空间立体 Ω 可以表示为以下方式：

侧面为柱面.

上方曲面 $z=z_2(x,y)$

下方曲面 $z=z_1(x,y)$

共同的定义域为 xOy 面上的区域 D.

这个立体的体积计算可以通过

以二元函数 $z=z_2(x,y)$，$(x,y)\in D$ 表示的曲顶柱体的体积 V_2

以二元函数 $z=z_1(x,y)$，$(x,y)\in D$ 表示的曲顶柱体的体积 V_1

两者体积差 $V_2-V_1=V$ 来计算.

即 $V=\iint\limits_{D}z_2(x,y)-z_1(x,y)\,d\sigma$

若 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ (X-型)

则 $V=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}z_2(x,y)-z_1(x,y)\,dy$

若 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ (Y-型)

则 $V=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}z_2(x,y)-z_1(x,y)\,dx$

继续看 $V = \iint_D z_2(x,y) - z_1(x,y)\, d\sigma$

以及 $V = \iiint_\Omega dv$

则有 $\iiint_\Omega 1\, dv = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1\, dz \right] d\sigma$