4月28日（第11周）

§10.3 三重积分

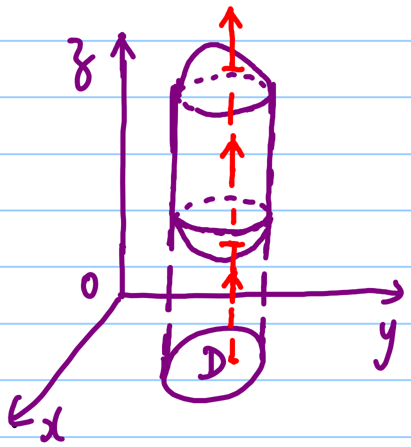
一. 三重积分的概念

二. 三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iint\limits_{D}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]d\sigma$$

$$\triangleq \iint\limits_{D} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$



其中 Ω 表示为以下立体：

侧面为柱面.

上方曲面 $z=z_2(x,y)$

下方曲面 $z=z_1(x,y)$

共同的定义域为 xOy 面上的区域 D

类似地，确定该立体时，也是通过一组垂直于 xoy 面，垂足点落在 xoy 面上的区域 D 的直线，该直线方向从下往上，从下方曲面 $z=z_1(x,y)$ 进入立体，从上方曲面 $z=z_2(x,y)$ 离开立体.

记为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$

若 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$ （X-型）

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iint\limits_{D} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

称为：先对z，再对y，最后对x的三次积分.

若 $D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ （Y-型）

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iint\limits_{D} d\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

称为：先对z，再对x，最后对y的三次积分.

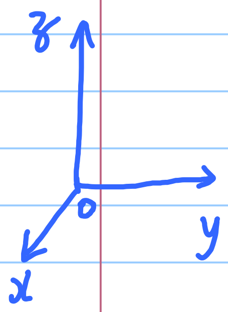
特别地，如果积分区域Ω为长方体区域：

$a\le x\le b,\quad c\le y\le d,\quad r\le z\le s.$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_r^s f(x,y,z)\,dz.$$

$$=\int_c^d dy\int_r^s dz\int_a^b f(x,y,z)\,dx$$

另外，除了将积分区域立体Ω分割为具有共同定义域的上方曲面$z=z_2(x,y)$和下方曲面$z=z_1(x,y)$.

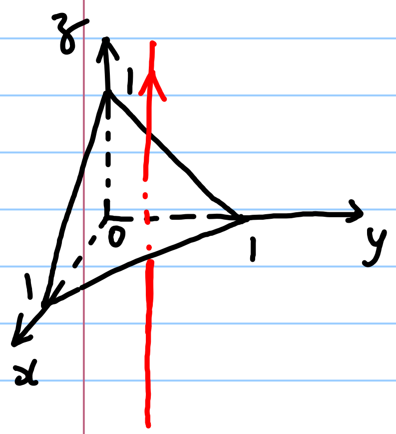


还可以分割为具有共同定义域的右方曲面$y=y_2(x,z)$和左方曲面$y=y_1(x,z)$.

以及分割为具有共同定义域的外方曲面$x=x_2(y,z)$和内方曲面$x=x_1(y,z)$

（前方） （后方）

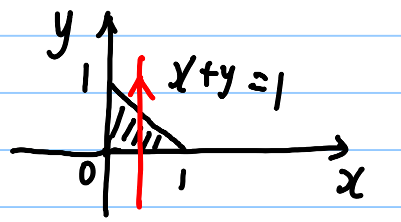
例 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的.



解：上方曲面 $z=1-x-y$

下方曲面 $z=0$

共同的定义域为D



$$\iiint_\Omega x\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} x\,dz$$

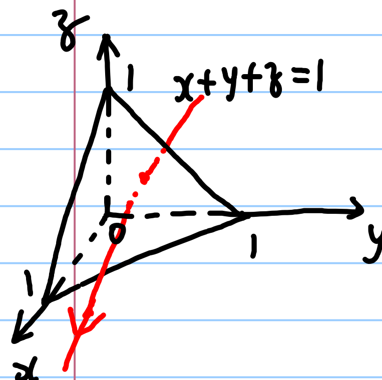
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)x\,dy$$

$$= \int_0^1 x\left[(1-x)(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-2x+x^2)\,dx$$

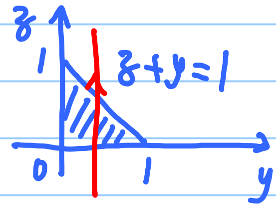
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{24}.$$



前方曲面 $x = 1-y-z$

后方曲面 $x = 0$

共同定义域为 D



$$\iiint_\Omega x\,dxdydz = \iint_D dydz \int_0^{1-y-z} x\,dx$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-y-z} x\,dx$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{1}{2}(1-y-z)^2\,dz$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{1}{2}(z-(1-y))^2\,d(z-(1-y))$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}(z-(1-y))^3\Big|_{z=0}^{1-y}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}(1-y)^3\,dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{6}(1-y)^3\,d(1-y)$$

$$= -\frac{1}{24}(1-y)^4\Big|_{y=0}^{1} = \frac{1}{24}$$

上述计算法有时称为投影法，积分区域 Ω 是由两块在某坐标面上具有共同投影区域所围成的立体。

接下来，还阐述一种方法，称之为截面法。

截面法

设立体 Ω 介于平面 $z=c_1$，$z=c_2$ 之间 $(c_1<c_2)$，

过点 $(0,0,z)$，其中 $z\in[c_1,c_2]$，

作垂直于 z 轴的平面与立体 Ω 相截得一截面 D_z，

于是区域 Ω （P163 图10-31）

表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,\ c_1\le z\le c_2\}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

而 $\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$ 是把 z 看为常数的二重积分。

若 $D_z=\{(x,y)\mid x_1(z)\le x\le x_2(z),\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\}$

（X-型）

则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\int_c^d dz\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

$$=\int_c^d dz\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}dx\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy$$

特别地，$f(x,y,z)=g(z)$ 时，

$$\iiint_{\Omega} g(z)\,dv=\int_c^d dz\iint_{D_z} g(z)\,dxdy$$

$$=\int_c^d\Big[g(z)\cdot\iint_{D_z}dxdy\Big]dz$$

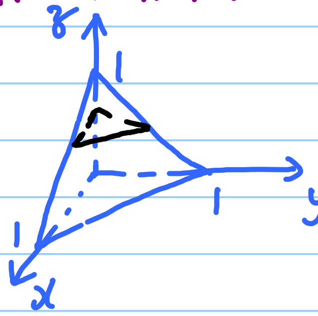
$$=\int_c^d g(z)\cdot S_{D_z}\,dz$$

其中 S_{D_z} 为 D_z 的面积

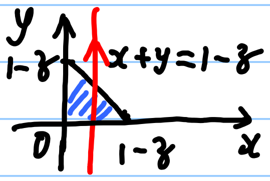
例 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$.

(实际上和上述例的结果一样：$\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{24}$)

解：采用截面法



D_z



$$D_z=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1-z,\ 0\le y\le 1-z-x\}$$

D_z 的面积 $S_{D_z}=\frac{1}{2}(1-z)^2$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} z\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=\frac{1}{24}$$

2. 利用柱面坐标计算三重积分

采用三重积分的换元法计算三重积分.

设 $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z$

此时的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}$$

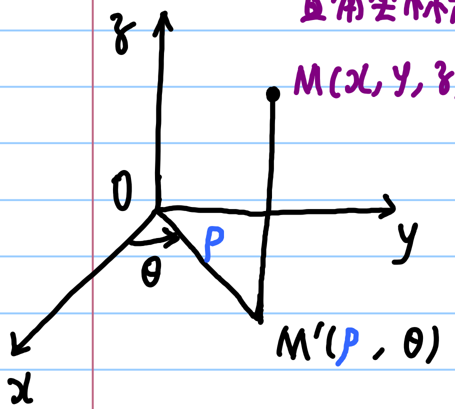
$$=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho$$

于是有 $dxdydz = \rho\, dr\, d\theta\, dz$

因此 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

这种换元法的思想和二重积分的极坐标类似.
也即不改变点及图形本身, 而用不同的坐标去表示



直角坐标系　　柱面坐标系.

$M(x,y,z) \longrightarrow (\rho, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

积分区域 Ω:

画与z轴平行的直线, 方向为z轴正方向.

从下方曲面 $z = z_1^*(x,y) = z_1^*(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = z_1(\rho,\theta)$

进入区域 Ω

从上方曲面 $z = z_2^*(x,y) = z_2^*(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = z_2(\rho,\theta)$

离开区域 Ω

若同定义域为 D, 用二重积分的极坐标方式表示 D.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$= \iint\limits_{D} \rho\, d\rho\, d\theta \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\, dz.$$

从上述过程，事实上可以完全不需要这种假设。
通过以下方式来处理：

首先积分区域 Ω 表示为如下方式：

上方曲面 $z = z_1(x, y)$

下方曲面 $z = z_2(x, y)$

共同定义域 D.

于是 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$

$= \iint\limits_{D} g(x, y)\,dx\,dy$，其中 $g(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$

接着用二重积分的极坐标方法来计算 $\iint\limits_{D} g(x, y)\,dx\,dy$.

P164 例3 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$,

其中 Ω 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.

解：首先来看 三重积分的直角坐标(投影法)

结合 二重积分的极坐标 做法：

上方曲面 $z = 4$，下方曲面 $z = x^2 + y^2$,

共同的定义域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz$$

$$= \iint\limits_{D} \left. \frac{1}{2} z^2 \right|_{z=x^2+y^2}^{4} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D} 16 - (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$$

对上述二重积分，采用极坐标：$x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$

D：$0 \leq \rho \leq 2$，$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (16-\rho^4)\,\rho\,d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \left[8\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6\right]\Big|_{\rho=0}^{2}$$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

作业: P166-168

1, 4, 6, 7, 8,

补充作业:

例1 (P162):

① 采用12种方法，分别列出三次积分计算公式

② 对其中一种截面法计算其答案.