5月5日（第12周）

§10.3 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

投影法（上下曲面，左右曲面，前后曲面）（每个中还有两种计算公式）

截面法（截面 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$）

总共有12种计算公式.

2. 利用柱面坐标计算三重积分

实际上是三重积分直角坐标投影法

结合二重积分极坐标.

P164 例3 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，

其中 Ω 是曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

解：方法一：三重积分直角坐标投影法

结合二重积分极坐标.

上方曲面 $z=4$，下方曲面 $z=x^2+y^2$，

共同的定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$.

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D} 16-(x^2+y^2)^2\,dx\,dy$$

对上述二重积分，采用极坐标：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$

D：$0\leq\rho\leq 2$，$0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (16-\rho^4)\,\rho\,d\rho$$
$$= \frac{64}{3}\pi$$

方法二：

柱面坐标做法：

采用柱面坐标：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$z=z$.

上方曲面 $z=4$，下方曲面 $z=x^2+y^2=\rho^2$

共同的定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$

$$=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

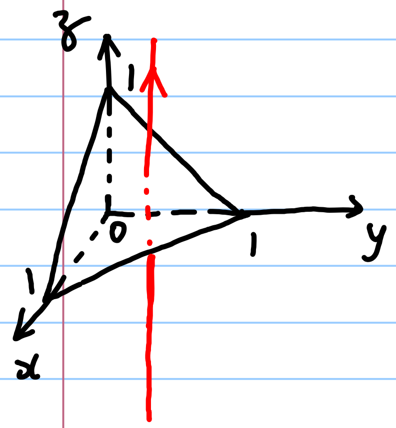
于是 Ω 表示成：$\rho^2\le z\le 4$，$0\le\rho\le 2$，$0\le\theta\le 2\pi$

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega z\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$
$$= \iint_D d\rho\,d\theta \int_{\rho^2}^4 z\rho\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_{\rho^2}^4 z\rho\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\,\frac{1}{2}z^2\Big|_{z=\rho^2}^{4}\,d\rho$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\,(16-\rho^4)\,d\rho$$
$$= \cdots$$
$$= \frac{64}{3}\pi$$

上述例子的第一种方法本身也常来在直角坐标系下使用投影法时，先转化为二重积分，再按二重积分的方法来处理。建议都用这种方法。

例如，还是之前的例

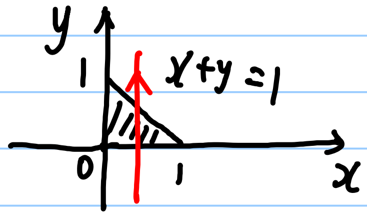
例 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的



解：上方曲面 $z=1-x-y$

下方曲面 $z=0$

其间的定义域为 D



$$\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D} dx\,dy\int_0^{1-x-y} x\,dz$$

$$=\iint\limits_{D} x(1-x-y)\,dx\,dy，\text{其中} D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy$$

$$=\cdots$$

"3* 利用球面坐标计算三重积分" 不作要求

(基本思想仍然是换元法)

作业：P167－168

9，11 (1) (3)，12 (1)

"第四节 重积分的应用

*第五节 含参变量的积分"

均不作要求

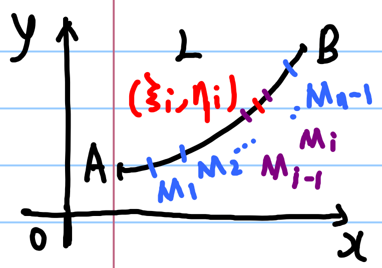
第11章 曲线积分(与曲面积分)

§11.1 第一类曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

引例：曲线形构件的质量（质量问题贯穿定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分）

设有一曲线形构件，占有 xOy 面上的一段曲线 L



线密度为 $f(x,y)$，试求该构件的质量.

设 $\overset{\frown}{AB}$（记为 L）为 xOy 面内的一条光滑曲线弧，线密度函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续.

用 L 上的点把曲线弧段 L 分成 n 个小段，其分点依次记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n$，其中 $M_0=A$，$M_n=B$. 设第 i 个小段的长度为 ΔS_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点，作乘积

$$f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

作为第 i 个小段质量的近似值

并作和 $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$$

作为曲线 L 质量的近似值

再记 $\lambda=\max\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n\}$. 如果当 $\lambda\to 0$ 时上述和式的极限总存在，则此极限值为曲线 L 质量的精确值，数学上称为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的第一类曲线积分.

具体定义如下：

定义：

设 $\overset{\frown}{AB}$（记为 L）为 xoy 面内的一条光滑曲线弧，

函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界

用 L 上的点把曲线弧段 L 分成 n 个小段，其分点

依次记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n$，其中 $M_0=A$，

$M_n=B$．设第 i 个小段的长度为 ΔS_i，

(ξ_i, η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点，作乘积

$$f(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$

再记 $\lambda=\max\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$．如果当 $\lambda\to 0$ 时

上述和式的极限总存在，则此极限值为

函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的第一类曲线积分．

记作 $\int_L f(x,y)ds$，即

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，L 称为积分弧段．

称阻称 $f(x,y)$ 在曲线 L 上可积．

特别地，若 $f(x,y)=1$，则有

$$\int_L 1\,ds \xlongequal{\text{记为}} \int_L ds = s = L\text{ 的弧长}.$$

而弧长问题是定积分的应用已解决的问题．

同样地，我们依旧从这个性质来理解

第一类曲线积分的计算公式．

类似地，有如下充分条件：

$f(x,y)$ 在曲线 L 上连续 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在曲线 L 上可积.

以后默认 $f(x,y)$ 在曲线 L 上连续.

上述定义可以推广为

积分弧段为空间曲线弧 Γ 的情形：

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$$

(ξ = xi , η = eta , ζ = zeta)

特别地，

如果 L 是闭曲线，则函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L 上

的第一类曲线积分记为

$$\oint_L f(x,y)\,ds$$

第一类曲线积分的性质：

性质1：$\int_L \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\,ds$

$= \alpha\int_L f(x,y)\,ds + \beta\int_L g(x,y)\,ds$

性质2：设 L 由 L_1 和 L_2 两段光滑曲线组成，

记为 $L=L_1+L_2$，则

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\,ds = \int_{L_1} f(x,y)\,ds + \int_{L_2} f(x,y)\,ds.$$

这个性质可以解释积分弧段允许是分段光滑的

性质3：设在L上有$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L g(x,y)\,ds$$

特别地，有 $\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \le \int_L |f(x,y)|\,ds$

二、第一类曲线积分的计算.

$$\int_L 1\,ds \xlongequal{\text{记为}} \int_L ds = s = L\text{ 的弧长.}$$

类似于二重积分、三重积分的计算公式推导，同样先看被积函数为1时的特殊积分.

在这里，即为L的弧长计算.

在上册第6章中，共有3种情形计算弧长.

1. 参数方程情形

曲线L：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad \alpha \le t \le \beta$

则 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

2. 直角坐标情形

① 曲线L的方程为$y = y(x)$，$a \le x \le b$，则

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

可以看作是参数方程的以下特殊情况：

$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$ $\quad a \le x \le b$

其中x为参数.

② 曲线L的方程为$x = x(y)$，$c \le y \le d$，则

$$s = \int_c^d \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

可以看作是参数方程的以下特殊情况：

$$\begin{cases} x = x(y) \\ y = y \end{cases} \quad c \le y \le d$$

其中 y 为参数.

3. 极坐标情形

由于这节考虑第一类曲线积分例子与习题均不涉及用极坐标表示曲线. 这种情形我们不作要求.

现在来看第一类曲线积分的计算公式

1. 参数方程情形

曲线 L: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$

则 $s = \int_\alpha^\beta 1 \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

$= \int_L 1\, ds$

$\Rightarrow$

$$\int_L f(x,y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

2. 直角坐标情形

① 曲线 L 的方程为 $y = y(x)$, $a \le x \le b$, 则

$s = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$

$= \int_L 1\, ds$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

② 曲线 L 的方程为 $x = x(y)$, $c \le y \le d$, 则

$s = \int_c^d 1 \cdot \sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy$

$$= \int_L 1\, ds$$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y)\, ds = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\, dy$$

公式理解后，实际上只需记一个公式即可，也即参数方程情形：

$$\text{曲线 } L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\int_L f(x,y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt$$

积分弧段为空间曲线Γ时：

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\, ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\, dt$$

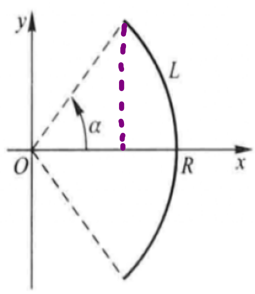
最终都转化为定积分问题。

这书例子基本上是直接套用公式。

P192. 例12 涉及到"转动惯量"这个物理概念。

我们只看转化为第一类曲线积分的纯数学问题：

计算 $I = \int_L y^2\, ds$，其中L为下图所示一段圆弧。



解：这个问题上，L的直角坐标表示为

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}, \qquad -R\sin\alpha \leq y \leq R\sin\alpha$$

$$\Rightarrow I = \int_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} y^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2}\, dy$$

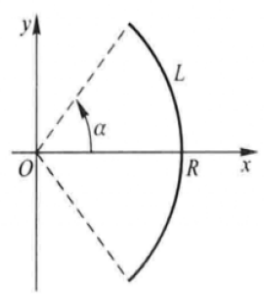
$$= \int_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} y^2 \sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\, dy$$

$$= \int_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha} y^2 \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\, dy$$

$$\underline{\underline{\text{设 } y=R\sin\theta}} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta \cdot \frac{R}{R\cos\theta} \cdot R\cos\theta\, d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta = \cdots$$

第二种方法，直接采用L的如下参数方程



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

注：不同于极坐标方程 $(\rho = R, -\alpha \le \theta \le \alpha)$

则 $I = \int_L y^2\, ds$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta$$

作业：P193

3 (3) (4) (5) (6)