5月8日

§11.2 对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

变力沿曲线所作的功

设一个质点在 xoy 面内受到力

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

（自变量和因变量均为二维的向量值函数）

的作用，从点A沿光滑曲线弧L移动到点B，

其中函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在L上连续.

要计算在上述移动过程中变力 $\vec{F}(x,y)$ 所作的功 W.

首先考虑一种特殊情况：

力 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ 是恒力，且质点从 $A=(x_0,y_0)$ 沿直线

移动到 $B=(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$.

此时的功 $W=\vec{F}\cdot\vec{AB}=(P,Q)\cdot(\Delta x,\Delta y)$

$$=P\Delta x+Q\Delta y$$

还有一种表示方式：

记 $\vec{AB}$ 的单位化向量为 $\dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

此时 $W=\left[(P,Q)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\right]\cdot|\vec{AB}|$

$$=\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta\right)\cdot|\vec{AB}|$$

再考虑一般情况：

先用曲线弧L上的点 $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, …,

$M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把L分成n个小弧段，取其中一个有向

小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 来分析，也即考虑力 $\vec{F}$ 在其上的功 ΔW_i.

首先在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 取一点 (ξ_i,η_i)，该点的力

$$\vec{F}(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\vec{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\vec{j}$$

近似代替 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上各点的力，也即力看成恒力.

而恒力移动的向量可以用有向线段

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}$$

来近似代替，其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

因此 $\Delta W_i \approx P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$.

同样，此时还有一种表示方式：

此时恒力移动的向量为以下向量：

大小规定为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长，记为 ΔS_i（相同于第一类曲线积分）

方向为有向曲线弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 在点 (ξ_i, η_i) 上与其方向相一致的切向量方向，用方向余弦表示成

$(\cos\alpha_i, \cos\beta_i)$

因此，恒力移动的向量为 $(\cos\alpha_i, \cos\beta_i)\cdot\Delta S_i$

$$\Rightarrow \Delta W_i \approx \left(P(\xi_i, \eta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i)\cos\beta_i\right)\cdot\Delta S_i$$

注：α_i，β_i 均为 (ξ_i, η_i) 的函数，因此

$$\left(P(\xi_i, \eta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i)\cos\beta_i\right)$$

相当于第一类曲线积分的 $f(\xi_i, \eta_i)$，也即

$$P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta$$

相当于第一类曲线积分的 $f(x,y)$，其中

$$(\cos\alpha, \cos\beta)$$

为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 上与其方向相一致的单位切向量.

因此所要求的功

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(P(\xi_i, \eta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i)\cos\beta_i\right)\cdot\Delta S_i\right]$$

其中 $\lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n\}$

第二个极限式实际上就是以下第一类曲线积分

$$\int_L \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right) ds.$$

而第一个极限式包含两个第二类曲线积分：

(1) 函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分：

$$\int_L P(x,y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

(2) 函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 y 的曲线积分：

$$\int_L Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

具体的第二类曲线积分定义参见教材（P195），

这里不再叙述.

$$\int_L P(x,y)\,dx + \int_L Q(x,y)\,dx \triangleq \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

我们的引例已经给出了 教材本节第三目（P202）

两类曲线积分之间的联系：

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right) ds$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 上与其方向相一致的单位切向量.

类似地，还可以考虑积分弧段为空间有向曲线弧 Γ 的情形，有类似的定义以及两类曲线积分的如下联系：

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 上与其方向相一致的单位切向量.

教材还提及一些向量符号，在例题及习题中均未涉及，这里不做阐述。

我们这里的阐述，已经充分阐明了两类曲线积分的联系，第一类的大多性质都可以推广到第二类，这里也不做阐述。

我们需要特别注意的是第二类曲线积分的积分弧段是有向曲线弧：

一段由点A移到点B的有向曲线弧 L，

与在同一段曲线弧上但从点B移到点A的有向曲线弧并不相同，后者可记为 L^-。

此时有

$$\int_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = -\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

证明：

若在有向曲线弧 L 上有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L \big(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\big)ds$$

其中 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 上与其方向相一致的单位切向量。

则在有向曲线弧 L^- 上，在点 (x,y) 上与其方向相一致的单位切向量为 $(-\cos\alpha,-\cos\beta)$，于是有

$$\int_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L^-}\Big(P(x,y)\big(-\cos\alpha\big)+Q(x,y)\big(-\cos\beta\big)\Big)ds$$

注意在第一类曲线积分中，积分曲线弧是没有方向的

因此 L^- 和 L 指的都是同一段曲线弧

$$=-\int_L\big(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\big)ds$$

$$=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

二. 对坐标的曲线积分的计算法

定理：设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，

L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，

点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，

也即起点 A 对应参数 α，终点 B 对应参数 β。

若 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上

$[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$

具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，

也即 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 不能同时为 0

则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$
$$=\int_\alpha^\beta \left\{P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\right\}dt.$$

这种计算法本质上和定积分的第二换元积分法没有差别。

也即采用换元法：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$。

$$\Rightarrow P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$
$$=\left\{P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\right\}dt.$$

起点 A 对应参数 α，终点 B 对应参数 β。

因此有，

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$
$$=\int_\alpha^\beta \left\{P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\right\}dt.$$

类似地，也可以用二类曲线积分的联系来证明，

这里不再证明。（参考 P202，不是 P197~198）

类似地，对于空间上的有向曲线弧Γ：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

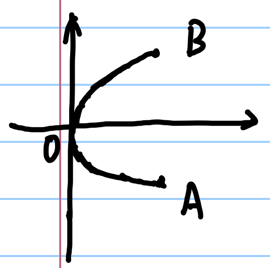
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big\{ P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\omega'(t) \Big\}\,dt$$

其中Γ的起点A对应参数α，Γ的终点B对应参数β.

注：此类问题在实际处理时，也存在第一类曲线积分中参数方程的选择问题.

例1. 计算 $\int_L xy\,dx$，其中L为抛物线 $y^2=x$ 从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.



解：由参数方程的选择决定不同的方法.

方法一：

$$\int_L xy\,dx = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,dx + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,dx$$

在有向曲线弧 $\overset{\frown}{AO}$（此写法默认A为起点，O为终点）上，

参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=-\sqrt{x} \end{cases}$　起点A对应参数 $x=1$，终点O对应参数 $x=0$

$$\int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,dx = \int_1^0 x\cdot(-\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$$

在有向曲线弧 $\overset{\frown}{OB}$ 上

参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$　起点O对应参数 $x=0$，终点B对应参数 $x=1$

$$\int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,dx = \int_0^1 x\cdot\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow \int_L xy\,dx = \frac{4}{5}$

方法二：

在有向曲线弧 $L=\widehat{AB}$ 上，

参数方程为 $\begin{cases} x=y^2, \\ y=y, \end{cases}$ 起点A对应参数 $y=-1$，终点B对应参数 $y=1$

$\Rightarrow \int_L xy\,dx = \int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot (y^2)'_y\,dy$

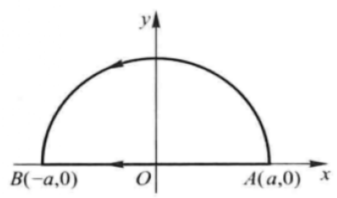
$= 2\int_{-1}^{1} y^4\,dy = \frac{4}{5}$

注：显然方法二要简单些.

例12 计算 $\int_L y^2\,dx$ 其中 L 为

(1) 半径为a，圆心为原点，按逆时针方向绕行的上半圆周

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.



解：(1) 参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$

起点A对应参数 $\theta=0$

终点B对应参数 $\theta=\pi$

$\Rightarrow \int_L y^2\,dx = \int_0^{\pi} (a\sin\theta)^2\cdot(-a\sin\theta)\,d\theta$

$= a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\cdot d\cos\theta = \cdots = -\frac{4}{3}a^3$

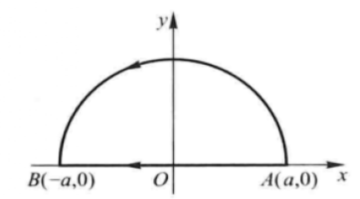
方法二：参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$

起点A对应参数 $x=a$，终点B对应参数 $x=-a$.

$\Rightarrow \int_L y^2\,dx = \int_a^{-a} a^2-x^2\,dx = \int_{-a}^{a} x^2-a^2\,dx = -\frac{4}{3}a^3$

显然方法二简单.

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.



解：参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$

起点 A 对应参数 $x=a$，

终点 B 对应参数 $x=-a$.

$$\Rightarrow \int_L y^2\,dx = \int_a^{-a} 0^2\,dx = 0$$

这个例子得到的结果：

虽然两个曲线积分的被积函数相同，起点和终点也相同，但沿不同路径得出的积分值并不相等.

而 教材 P200 例13 （不再阐述，方法类似）

得到的结果：

三个曲线积分的被积函数相同，起点和终点也相同，尽管沿不同路径，但得出的积分值都相等.

什么时候会有如上结论，§11.3 将给出条件.