5月10日 (第13周)

§11.2 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、对坐标的曲线积分的计算法

三、两类曲线积分之间的联系

我们在本节第一目已经阐述了，这里举一个具体例子.

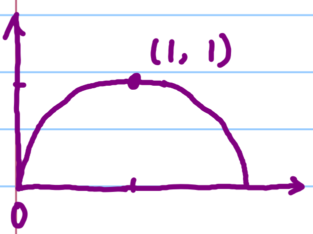
P204. 7(3)

把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

化成对弧长的曲线积分，其中 L 为

(3) 沿上半圆 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

解: $x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$



L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$$

L 的起点对应参数 $x=0$

L 的终点对应参数 $x=1$

注意到从起点到终点，参数由小变到大.

由参数方程关于参数求导，所得到的切向量为

$\left(1, \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\right)$，其指向为参数的增长方向.

也即参数由小变到大的方向.

因此该切向量的单位化向量与有向曲线弧 L 的方向相一致.

也即方向余弦如下:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2+(1-2x+x^2)}} = \sqrt{2x-x^2}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = 1-x$$

$\Rightarrow$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_L \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right) ds$$

$$= \int_L \left[\sqrt{2x-x^2}\, P(x,y) + (1-x)\, Q(x,y)\right] ds$$

注：此类类似问题的参数方程建议参数设为 x 或 y（或 z）.

作业：

3(2)(4)(6)(8)；4；7(1)；8

§11.3 格林公式及其应用

一、格林公式

① 单连通区域，复连通区域

设 D 为一平面区域，如果区域 D 内任一闭曲线所围成的部分都属于 D，则称 D 为平面单连通区域，否则称为复连通区域

单连通区域：不含有"洞"以及"点洞"

例：$\{(x,y) \mid x^2+y^2<4\}$、$\{(x,y) \mid x>0\}$

复连通区域：含有"洞"或者"点洞"

例：$\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$、$\{(x,y) \mid 0<x^2+y^2<1\}$

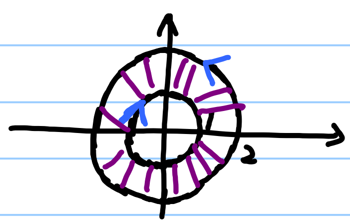
② 曲线L的方向

设平面区域 D 是由曲线 L 所围成，则规定 L 的正向如下：当观察者沿着曲线 L 的这个方向前进时，能保持区域 D 总在他的左侧；

与 L 的正向相反的方向称为 L 的负向.

例：

$\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$



曲线 $x^2+y^2=4$ 的正向：逆时针

曲线 $x^2+y^2=1$ 的正向：顺时针

(有界)

定理1. 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，
函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，
则有

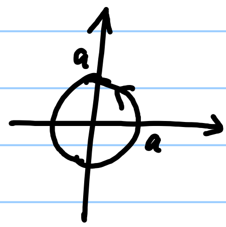
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy \quad (3\text{-}1)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

称 (3-1) 为格林公式，或表示为

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

例1. $\oint_L xy^2\,dy - x^2y\,dx$，



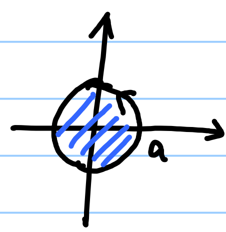
其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 依逆时针方向

解：闭区域 D 为 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$

$P = -x^2y$，$Q = xy^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$



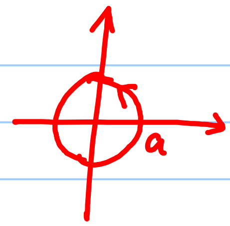
$$= \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^4$$

补充作业:

例1 $\oint_L xy^2\,dy - x^2y\,dx$，



其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 依逆时针方向

采用§11.2 的方法.

格林公式的一种特殊情形:

设 $P=-y$, $Q=x$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$

于是 $\iint\limits_D 1-(-1)\,dxdy = \oint_L P\,dx+Q\,dy$

$\Rightarrow\ 2\iint\limits_D dxdy = \oint_L x\,dy - y\,dx$

即 闭区域D的面积

$$A=\iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.$$

应用.

例3. 求椭圆 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ 所围成图形的面积A.

解: $L:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ 其中起点对应 $\theta=0$
终点对应 $\theta=2\pi$

则 $A=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cdot b\cos\theta + b\sin\theta\cdot a\sin\theta)\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab.$

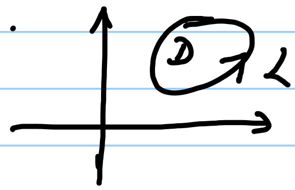
例14 计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向

解：记 L 所围成的闭区域为 D，设

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

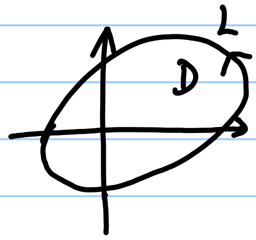
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$



情形1. 当 $(0,0)\notin D$ 时，

由格林公式，得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$



情形2. 当 $(0,0)\in D$

不能在 D 上使用格林公式.

因为格林公式要求在 D 上

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

具有一阶连续偏导数，但 P,Q 在 D 内点 $(0,0)$ 处甚至都没有定义

现在改为在图示的阴影部分 D_1 上

其中内部边界曲线为 l：$x^2+y^2=r^2$

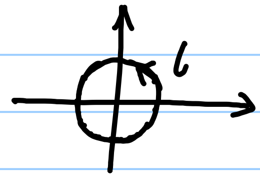
r 足够小. 曲线 l 正向为顺时针方向.

此时应用格林公式，有

$$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} + \oint_l \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = -\oint_l \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$= \oint_{l^-} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

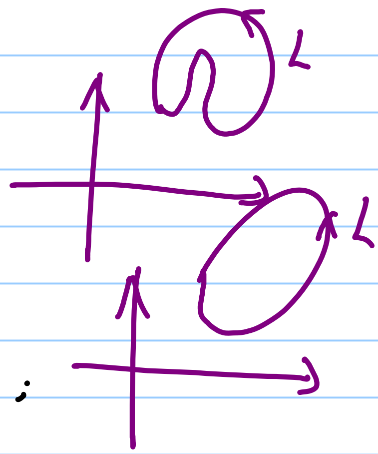


此时 l^- 为逆时针方向

l^-: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ 起点，对应 $t=0$
终点，对应 $t=2\pi$

$$\oint_{l^-} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r\cos t\cdot r\cos t + r\sin t\cdot r\sin t}{r^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$



因此：

情形1. 当 $(0,0) \notin D$ 时，

$$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = 0 \;;$$

情形2. 当 $(0,0) \in D$ 时，

$$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi .$$