5月12日（第13周）

第十一章 曲线积分

§11.1 对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

§11.2 对弧长的曲线积分（第二类曲线积分）

§11.3 格林公式及其应用

一、格林公式

定理1. 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数P(x,y)及Q(x,y)在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_L P\,dx+Q\,dy$$

其中L是D的取正向的边界曲线.

二、平面上曲线积分与路径无关的条件
三、二元函数的全微分求积

}一并阐述

§11.2节 P200 例12. 例13.

沿着具有相同起点和终点，但积分路径不同的第二类曲线积分，其积分值可能相等，可能不相等.

平面曲线积分与路径无关的定义：

设函数P(x,y)及Q(x,y)在平面区域D内具有一阶连续偏导数.

若对于D内任意指定的两个点A, B,
及D内从点A到点B的任意两条曲线 L_1, L_2,
有 $\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$,
则称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在D内与路径无关,
否则称与路径有关.

定理2 定理3 一并阐述

设开区域D是一个单连通域, 函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$
在D内具有一阶连续偏导数, 则下列命题等价:
(1) 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在D内与路径无关;
(2) 对D内任一闭曲线L, $\oint_L Pdx + Qdy = 0$
(3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在D内恒成立
(4) 表达式 $Pdx + Qdy$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分

证明不作要求.

其中(2) ⟺ (3) 实际上是格林公式的特例.
格林公式无需单连通域要求.

条件(4)的含义:

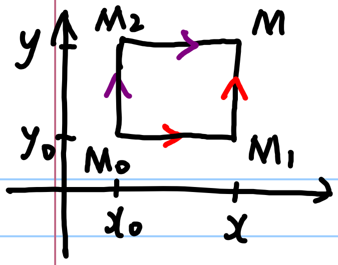
即 $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

称为 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 的原函数.

因与积分路径无关. 特别地, 取



(1) $\overset{\frown}{M_0M_1M}$: $(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$

则 $u(x,y) = "\int_{M_0M_1} + \int_{M_1M}"$

$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$

$\overset{\frown}{M_0M_1}$: $(x_0,y_0)\to(x,y_0)$

(2) $\overset{\frown}{M_0M_2M}$: $(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$

则 $u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$

若 $(0,0)\in D$，常选 (x_0,y_0) 为 $(0,0)$.

此外，设 $\overset{A}{(x_1,y_1)}$，$\overset{B}{(x_2,y_2)}$ 是 D 内任意两点，

若 $Pdx+Qdy$ 存在原函数，设为 $u(x,y)$，则

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy = u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

称为 曲线积分的牛顿－莱布尼茨公式.

其中 $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy$ 是个第二类曲线积分，

其积分弧段为 D 内起点为A，终点为B的任一分段光滑曲线.

(教材 P215-216. 四*. 曲线积分的基本定理)

这个公式与微积分基本公式(牛顿－莱布尼茨公式)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

其中 $f(x)$ 的原函数假设存在，设为 $F(x)$.

完全类似.

P213 例15 验证：$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数

解：设 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

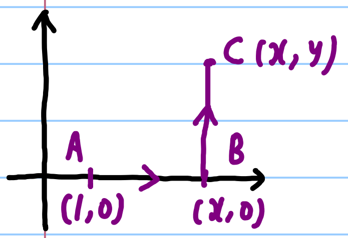
则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

因此在右半平面 $(x>0)$ 内上式恒成立，

$\Rightarrow \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是某个函数的全微分

这样的一个函数为



$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{AB}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{BC}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$(1,0)\to(x,0)$　　　$(x,0)\to(x,y)$

$$=\int_1^x\frac{-0}{x^2+0^2}dx+\int_0^y\frac{xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_0^y$$

$$=\arctan\frac{y}{x}$$

例1　计算 $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，积分沿不通过坐标原点的路径.

解：方法一：

当 $(x,y)\neq(0,0)$，$d\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

$$=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因此，

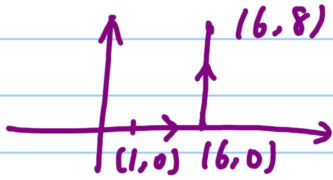
$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{(1,0)}^{(6,8)}d\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}$$

$$=10-1=9$$

方法二：

此时 $P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



因此：

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_1^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+0^2}} + \int_0^8 \frac{y\,dy}{\sqrt{6^2+y^2}}$$

$(1,0) \rightarrow (6,0) \rightarrow (6,8)$

$$= \int_1^6 dx + \int_0^8 \frac{1}{2}(6^2+y)^{-\frac{1}{2}}\,d(6^2+y^2)$$

$$= 5 + \sqrt{6^2+y^2}\,\Big|_{y=0}^{8}$$

$$= 5 + 10 - 6 = 9$$

注：此类题目有时出题可以有意考上述知识点，但题目形式可能如下：

$\int_L \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 L 的起点为 $A=(1,0)$，终点为 $B=(6,8)$，L 的方程如下：

$(x-1)(x-6)+y(y-8)=0$

$(x-1)(x-6)h(x,y)+y(y-8)g(x,y)=0$

作业：P216-217

1, 3, 6(2), 7(1)(4), 8(2)(4)

§11.4—§11.7 不做要求.

第12章 无穷级数

本章只阅读 §12.1 — §12.4

$$\begin{cases}\text{常数项级数}\\ \text{函数项级数}\end{cases}$$

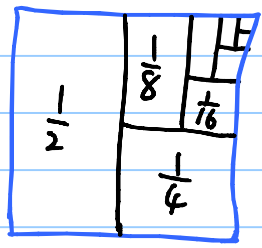
设 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 是一个给定的数列，按照数列 $\{u_n\}$ 下标的大小依次相加，得

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

这个表达式称为常数项无穷级数.

例如：$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{2})^n\}_{n=1}^{\infty}$，则得到

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$



设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 I 上的函数列，表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

称为定义在 I 上的函数项级数.

例如：$\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{x^n}{n!}\}_{n=0}^{\infty}$，则得到

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$ (以后证明)

它的一个基本应用：计算函数 e^x 时，

可以使用 n 次多项式

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

进行近似.

§12.1 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

定义：

设 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 是一个给定的数列，按照数列 $\{u_n\}$ 下标的大小依次相加，得

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

这个表达式称为常数项无穷级数，简称为级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

u_n：一般项或通项.

直观地说，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 表示无穷多个数的和.

这个和是否存在，是通过从下数列的极限是否存在进行判断.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和

$$S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

称为级数的前 n 项部分和.

而以 S_n 作为通项的数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为部分和数列，此时有

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \cdots,\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots$$

定义. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 存在极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限 S 称为级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，即

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则部分和 $S_n \approx S$ （n很大时）

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为余项. 因 $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$，

$|r_n|$：用 S_n 近似 S 所产生的误差.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散，

且在收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n$.

而发散的级数没有"和"可言.

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的问题

可以转化为数列 $\{S_n\}$ 的问题.

前提：数列 $\{S_n\}$ 的问题更容易解决.

例3 $\quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

解：由 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，得

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

因此，题设级数收敛，且和为 1.

例12. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$

等差级数

$\frac{(首项+尾项)\times 项数}{2}$

解：$S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

因此，题设级数发散.