5月15日

第12章 无穷级数

§12.1 常数项级数的概念和性质

一. 常数项级数的概念

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与部分和数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散

例1. 等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

解: $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \\ na & (q = 1) \end{cases}$$

$\dfrac{首项 \times (1-公比^{项数})}{1-公比}$

当 $|q|<1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

当 $|q|>1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

当 $q=-1$ 时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-(-1)^n)}{1-(-1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} a [1-(-1)^n] \text{ 不存在}$$

当 $q=1$ 时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$.

因此: 当且仅当 $|q|<1$ 时, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛,

且 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}$. $\dfrac{首项}{1-公比}$.

上述例的共有特征：部分和数列通项 S_n 具有解析表达式，即可以表示 n 的初等函数。

（转化为部分和数列方法的局限性）

二、收敛级数的基本性质

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散，且在收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n$。

性质1：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = ks$。

性质2：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 A, B

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$
$$= \alpha A + \beta B,$$

其中 α, β 为常数。

性质3：在级数中去掉，加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性。（教材用收敛性）

但在收敛时，级数和可能发生改变。

例：当且仅当 $|q|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，且和为 $\frac{a}{1-q}$。

当且仅当 $|q|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ 收敛，且和为 $\frac{aq}{1-q}$。

性质4：在一个收敛级数中，任意添加括号所得到的新级数仍收敛于原来的和。

前提是收敛级数，否则结论不成立。

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$

是发散的，但加括号后的下述新级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$
$$=0+0+\cdots+0+\cdots$$

是收敛的。

推论（逆否命题）：如果加括号后所得到的级数发散，则原来的级数也发散。

性质5：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$。

推论（逆否命题）：如果"$\lim_{n\to\infty}u_n=0$"不成立，"一般项不趋于0"

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

这两个推论的应用：

例. 证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的

证：对题设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 按下列方式加括号。

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)}_{2^m}+\cdots$$

得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

$v_1=1,\ v_2=\frac{1}{2},\ v_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\frac{1}{2},$

$V_4 = \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{2}$, $\cdots$

$$V_{m+2} = \frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$> \frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$= 2^m\cdot\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}, \cdots$$

因此"$\lim\limits_{m\to\infty} V_m = 0$"不成立.

则 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} V_n$ 发散.

$\Rightarrow$ 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

注：虽然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

并且部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \to +\infty$.

但 S_n 趋向于无穷大的速度非常慢.

(计算了上万项，其部分和也仅仅接近 10)

今后也将调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

作为判别其它级数敛散性的比较对象.

(参照物)

作业：P258

2 (2)(4)   3 (2)(3)(5)

§12.2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法（判别法）

定义　若 $u_n \geq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$，　$n=k+1, k+2, \cdots$ k为给定的正整数

则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

性质：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$

是单调增加数列：$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$

"单调有界数列必有极限"

"有极限的数列必有界"

定理1　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件

是：它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理2（比较判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\underset{\text{"小"}}{u_n} \leq \underset{\text{"大"}}{v_n}\ (n=1,2,\cdots)$，

则 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

"大级数收敛" $\Rightarrow$ "小级数收敛"

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

"小级数发散" $\Rightarrow$ "大级数发散"

注：$u_n \leq v_n\ (n=1,2,\cdots)$

可以减弱为 $u_n \leq v_n\ (n=k, k+1, \cdots)$

或 $u_n \leq C v_n\ (C>0$ 为常数，$n=k, k+1, \cdots)$

例1. 讨论 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性，其中常数 $p>0$.

解：当 $p\leq 1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$，

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

(小级数)

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是发散的.

(大级数)

当 $p>1$ 时，此时通过定理1来证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

也即证明 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ 有界 (上界)

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx\leq\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx\quad(n=2,3,\cdots)$$

$\left(n-1\leq x\leq n,\ \frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{x^p}\right)$

$$\Rightarrow S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\leq 1+\int_1^2\frac{1}{x^p}dx+\int_2^3\frac{1}{x^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$<1+\frac{1}{p-1}$$

因此 $\{S_n\}$ 有界，因此 p-级数收敛.

总之，

$$\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时，} p\text{-级数 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ 收敛；}\\ \text{当 } 0<p\leq 1 \text{ 时，} p\text{-级数 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ 发散.}\end{cases}$$

上述结果加上之前的下述结果

当且仅当 $|q|<1$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ 收敛

所得的这两种级数常常成为比较判别法的比较参照物.

例1　设 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证：$a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n + (c_n - a_n)]$ 收敛.

逆否命题：设 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散，$\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

直接证明：

$a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 发散.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 发散.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(b_n - a_n) + a_n]$ 发散