5月19日

§12.2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法（判别法）

上节课实际上阐述了两种方法：

① 通过判别部分和数列有上界来证明正项级数收敛.

② 比较判别法.

通过寻找一个收敛的大级数来证明原级数收敛

寻找一个发散的小级数来证明原级数发散.

比较判别法使用时，有以下更简便的方式，

称之为比较判别法的极限形式.

定理 3：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$.

（与课本表述不同）（待判断）（已知）（$l\geq 0$ 或 $l=+\infty$）

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，这两个级数有相同的敛散性.

(2) 当 $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\frac{u_n}{v_n}\leq 1 \Rightarrow u_n\leq v_n$ （大级数）（小级数）

(3) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$\frac{u_n}{v_n}\geq 1 \Rightarrow u_n\geq v_n$ （小级数）（大级数）

这里的(2)依旧在寻找一个收敛的大级数来证明原级数收敛

(3) 依旧在寻找一个发散的小级数来证明原级数发散.

并未显示出比较判别法极限形式的便利处.

采用这种表述的，关键点在于情形 (1)

情形 (1) 的应用：

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

首先判断 u_n 为无穷小.

然后运用无穷小的等价关系，

得到 $u_n \sim l v_n \quad (n\to\infty)$，$0<l<+\infty$，$l$ 为有确定数.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性已知 （通常是 p-级数）

因此可得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow$ 原级数发散

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} \sim \frac{2n}{n^2\cdot n^2} = \frac{2}{n^3} \quad (n\to\infty)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛.

例3 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散.

接下来我们阐述的是后面的例7和例8

例7 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \quad (n \to \infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛.

例8 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi^2 \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\pi^2 \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛.

例7. 例8 在这里的阐述. 表明教材定理6 (极限审敛法) 只是这个定理的特殊情形. 因此没有必要单独阐述定理6.

以下我们再一次提及等价无穷小:

当 $x \to 0$:

$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$

$\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

当 α 为某个无穷小. $\alpha \neq 0$ (局部范围内)

$\sin\alpha \sim \alpha$, $\tan\alpha \sim \alpha$, ...

使用比较判别法或其极限形式, 需要找到一个已知敛散性的级数作比较.

以下判别法, 则利用级数自身的特点.

定理4 (比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 或 $+\infty$，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho>1$ (包括 $\rho=+\infty$) 时，级数发散

并且 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. (证明过程体现出来的)

(3) 当 $\rho=1$ 时，本判别法失效.

例14 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ 是收敛的，并估计以级数的部分和 S_n 近似代替和 S 所产生的误差.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ 是收敛的

部分和 S_n 近似代替和 S 所产生的误差

$$|r_n|=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)(n-1)!}$$

例15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

解：$u_n=\frac{n!}{10^n}$

由 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \dfrac{n+1}{10} \to +\infty$
$(n\to\infty)$

则 原级数发散.

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{10^n} \neq 0$

甚至 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{10^n} = +\infty$

*定理5 (根值判别法) (考试要求掌握, 多一种判别法 并且与比值判别法几乎类似)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 或 $+\infty$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$ (包括 $\rho=+\infty$) 时, 级数发散
并且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

(3) 当 $\rho=1$ 时, 本判别法失效.

例6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$

解: 由 $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \leqslant \dfrac{3}{2^n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3}{2^n}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}} = \dfrac{1}{2} < 1$

因此 原级数收敛.

作业: P271-272

1, 2(3)(4), 3(1),

二、交错级数及其审敛法

第一目讨论了特殊的常数项级数：正项级数。

同时解决了半正项级数，负项级数，半负项级数。

注：仅考虑敛散性问题；未考虑收敛时的和。

这一目 继续讨论另一种特殊的常数项级数：

交错级数。

定义：

若 $u_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数。

定理7（莱布尼茨定理）

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，并且它的和 $s\leq u_1$。

若以部分和 s_n 作为 s 的近似值，其误差 $|r_n|$ 不超过 u_{n+1}，即 $|r_n|=|s-s_n|\leq u_{n+1}$。

注：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$
$\leq u_1$

$$|r_n| = |S - S_n| = \left| (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \right|$$

$$= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots$$

$$\leq u_{n+1}$$

（实际上依旧是一个首项取值为正的交错级数，其和不超过首项）