5月22日（第15周）

第12章 无穷级数

§12.1 常数项级数的概念和性质

§12.2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

定理7（莱布尼茨定理）

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$,

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，并且它的和 $s \leq u_1$.

若以部分和 s_n 作为 s 的近似值，其误差 $|r_n|$ 不超过 u_{n+1}，即 $|r_n| = |s-s_n| \leq u_{n+1}$.

注：称满足上述定理7的级数为莱布尼茨交错级数.

例：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

由莱布尼茨定理，很容易判别

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

收敛，并且其和 $s\leq 1$. 若取前n项的和

$$s_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为s的近似，则其误差 $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$，也即意味着近似的精度可以很容易被控制.

后面的章节可以证明和 $s=\ln 2$.

例1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

解：设 $u_n=\frac{\ln n}{n}>0\ (n>1)$

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

由 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x>3)$

则 $n>3$，$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 是递减数列.

再由 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

因此原级数收敛.

注：这个例子本身也展示了如何证明一个交错级数收敛的一般性方法：也即考虑通项的绝对值 u_n

① 证明 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

② 将 u_n 看作 $f(n)$，从函数 $f(x)$ 角度判别是否为递减函数，也即 $f'(x)<0$，只需在 x 足够大前提下满足即可.

三、绝对收敛与条件收敛.

现在，讨论一般的常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

此时，构造一个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的绝对值级数.

定理8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

定义 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一般常数项级数，则

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛时，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

一般常数项级数
- 收敛
  - 绝对收敛
  - 条件收敛
- 发散

例1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ $(p>0)$

解：由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

(1) 当 $p>1$ 时，题设级数绝对收敛；

(2) 当 $0<p\leq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|$ 发散.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 满足莱布尼茨定理条件，因此收敛.

因此，题设级数条件收敛.

例10 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性

解：首先先考虑其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

由 $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{2}e > 1 \quad (n\to+\infty)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，并且 $|u_n| \not\to 0$ （这是根值、比值判别法的特殊结论：也即由两种判别法所得到的正项级数发散一定是一般项不趋于0的那种发散）

也即 $u_n \not\to 0$，

因此原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

"*四. 绝对收敛级数的性质" 不作考试要求.

(定理9 可以应用于概率统计中)

注：本节需要注意方法的多样性，考试时不会像例题和习题那样指定方法. 比如下面的例6.

例6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

解：方法一：根值判别法已阐述.

方法二：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ 为莱布尼茨交错级数，因此收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}$ 为公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数，因此收敛

$\Rightarrow$ 原级数收敛.

注：该方法在此题修改为如下形式，仍适用：

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C+(-1)^n}{2^n}$，其中 C 为给定的某个常数，C 可正可负.

而方法一仅在 $|c|>1$ 时适用.

其中 $c>1$ 时为正项级数，$c<-1$ 时为负项级数.

$|c|=1$ 时，扩展后的根值判别法仍适用.

现在来看其中一种 $|c|<1$ 时的 c 取值，例如 $c=\frac{1}{2}$

则方已经说明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

因该级数每项不是正数，修改为如下级数，依旧收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}+(-1)^{n+1}}{2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$$

显然这是交错级数，但却不是莱布尼茨交错级数.

因为通项的绝对值并不满足单调递减，

当 $n=2k$ 时，通项的绝对值为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2k}}$

而它的下一项，也即

当 $n=2k+1$ 时，通项的绝对值为 $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{1.5}{2}\cdot\frac{1}{2^{2k}}$

$$>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2k}}$$

注意通项的绝对值依旧趋于0，两者并没有矛盾.

作业：P271–272

4(3)(4)(6)，5(1)(2)(3)

§12.3 幂级数

一、函数项级数的概念

设$\{u_n(x)\}$是定义在数集I上的函数列，表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

称为定义在I上的函数项级数.

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

称为部分和.

对$x_0\in I$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，成为常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

若该常数项级数收敛，即$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)$存在，

则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在点$x_0$处收敛，

x_0称为该函数项级数的收敛点.

若$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)$不存在，

则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在点$x_0$处发散，

x_0称为该函数项级数的发散点.

$$\begin{cases}\text{收敛域：全体收敛点的集合；　记为 } D\\ \text{发散域：全体发散点的集合}\end{cases}$$

对收敛域D内的每一点x，$\lim_{n\to\infty}S_n(x)$存在，

记为$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$，为$x$的函数，称为函数项级数的和函数.

余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

$$=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0,\quad x\in D.$$

因此函数项级数的问题归纳为如下两个问题：

(1) 求收敛域 D；

(2) 在收敛域 D 内，求和函数 $S(x)$.

同样，这里先考虑收敛域 D.

求收敛域 D 的基本方法，转化为常数项级数的敛散性问题.

这种基本方法在后面的例子中进行展示.

二. 幂级数及其收敛性

幂级数：各项都是幂函数的函数项级数.

形式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

注：对于形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的幂级数，可通过

变量代换 $t = x - x_0$ 转化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的形式.

例：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

解：采用基本方法：转化为常数项级数的敛散性问题.

当 x 取为某个常数 q，该幂级数实际上就是常数项级数中

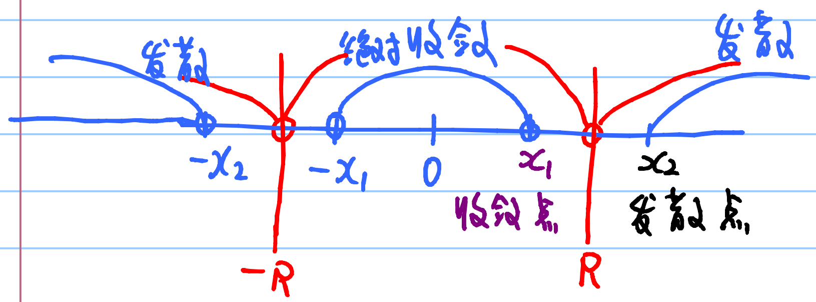
的等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.　　　　我们已经得到结论：

当且仅当 $|q| < 1$ 时，等比级数收敛.

也即 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是区间 $(-1, 1)$.

收敛域是区间，是幂级数的一般性结论：

定理1（阿贝尔定理） 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n\ (x_0 \neq 0)$ 收敛，则对于满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 发散，则对于满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.



推论1. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必存在一个完全确定的正数 R，使得

(1) 当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；

(2) 当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；

(3) 当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散.

称 R 为幂级数的收敛半径，$(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间.

若幂级数的收敛域为 D，则

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R].$$

此时，D 为 $(-R, R)$，$(-R, R]$，$[-R, R)$，$[-R, R]$ 中的一个.

幂级数的收敛域 D 的两种特殊情况

① $D=\{0\}$，此时规定 $R=0$.

由幂级数的形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$x=0$ 一定是收敛点

② $D=(-\infty,+\infty)$，此时规定 $R=+\infty$.

具体例子见例2及例3.

关于幂级数的收敛半径的求法：

定理2（比值法）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的所有系数 $a_n \neq 0$，

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

(1) 当 $\rho \neq 0$ 时，此幂级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$；

(2) 当 $\rho = 0$ 时，此幂级数的收敛半径 $R=+\infty$；

(3) 当 $\rho = +\infty$ 时，此幂级数的收敛半径 $R=0$.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域的基本步骤：

(1) 求出收敛半径 R

(2) 判别常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 的敛散性

(3) 写出幂级数的收敛域.

例1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域

解：由 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 $x=-1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散

当 $x=1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，

为莱布尼茨交错级数，收敛

因此收敛域为 $(-1, 1]$

例2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

解: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow R = +\infty$

因此收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例3 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ 注意与例2区别

解: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$

$\Rightarrow R = 0$

所以级数仅在点 $x=0$ 处收敛.