5月24日

§12.3 幂级数

一、函数项级数的概念

基本方法：转化为常数项级数，使用常数项级数判别方法

二、幂级数及其收敛性

先求收敛半径，再判别端点敛散性

例4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径

解：尽管这是一个幂级数，但由于缺少奇次幂的项，因此无法使用定理2.

这里采用基本方法：转化为常数项级数的敛散性问题.

对该级数的绝对值级数采用比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|^2$$

$$= 4|x|^2$$

因此，当 $4|x|^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，绝对值级数收敛，

则原级数绝对收敛；

当 $4|x|^2>1$，即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时，绝对值级数发散，

且通项绝对值不趋于0，因此原级数发散.

$\Rightarrow$ 幂级数收敛半径 $R=\frac{1}{2}$

例5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛域

解：令 $t=x-1$，则上述级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}$$

由 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\Big/\frac{1}{2^n\cdot n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$

当 $t=-2$，也即 $x=t+1=-1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛.

当 $t=2$，也即 $x=t+1=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

因此，原级数的收敛域为 $[-1,3)$.

三、幂级数的运算.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，

记 $R^*=\min\{R_1,R_2\}$.

(1) 加减法：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

其中 $c_n=a_n\pm b_n$，上述式子在 $x\in(-R^*,R^*)$ 内成立.

注：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径 $\geq R^*$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径 $=R^*$ 的两种情况

① $R_1\neq R_2$

② $R_1=R_2$，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛域不同.

(2) 乘法

(3) 除法

} 不作要求，因例子、习题均未涉及，且问题本身比较复杂.

下面来看一个加减法运算的例子：

例 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n$ 的收敛域

解：(1) 先考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$

由 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$

及 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R_1=1$

(2) 再考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n$

由 $b_n=\frac{1}{4^n}$

及 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ 收敛半径 $R_2=4$

(3) 因 $R_1\neq R_2$，

因此 题设级数的收敛半径为 $\min\{R_1,R_2\}=1$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n$ 在 $x=\pm1$ 时均收敛.

只需考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 在 $x=\pm1$ 时敛散性

此时，当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

因此 题设级数 在 $x=1$ 时 收敛

在 $x=-1$ 时 发散.

综上，题设级数的收敛域为 $(-1,1]$.

接下来，考虑幂级数的求极限运算，求积分运算，以及求导数运算.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，收敛域为 I.

性质1：幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续；

$$\lim_{x\to x_0} s(x)=s(x_0)\quad, x_0\in I$$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

"$\lim\limits_{x\to x_0}$" 与 "$\sum\limits_{n=0}^{\infty}$" 可交换

性质2：幂级数的和函数在其收敛域 I 上可积，并在 I 上有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)\,dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

也即 "$\int_0^x$" 与 "$\sum\limits_{n=0}^{\infty}$" 可交换

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径相同.

性质3：幂级数的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，并在 $(-R,R)$ 内有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

也即 求导运算 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 可交换

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 具有相同的收敛半径

上述性质的一个主要应用：求幂级数的和函数.

"通过对题设级数求导或求积分将它转化为等比级数"

例16 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解：首先求收敛域，也即和函数的定义域

由 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\Big/\frac{1}{n+1}=1$

$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$

在端点 $x=-1$ 处，幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$，收敛。

在端点 $x=1$ 处，幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$，发散。

因此收敛域 $I=[-1,1)$.

接着求和函数，设为 $S(x)$.

即 $\quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x\in[-1,1)$

$$\Rightarrow x\,S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

两边关于 x 求导，利用逐项求导公式，也即“$\sum_{n=0}^{\infty}$”与“求导”可交换.

$$[x\,S(x)]'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, \quad -1<x<1$$

也即 $(x\,S(x))'=\frac{1}{1-x}, \quad -1<x<1$

对上述从 0 到 x 积分，得

$$\int_0^x (t\,S(t))'\,dt=\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$

$$x\,S(x)-0\cdot S(0)=-\ln(1-t)\Big|_{t=0}^{x}=-\ln(1-x)$$

$\Rightarrow x\,S(x)=-\ln(1-x)$

$\Rightarrow S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，此时 x 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

由于 $S(x)$ 的定义域为 $I=[-1,1)$，并且 $S(x)$ 在 I 上连续.

因此 $\quad S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}-\frac{1}{x}\ln(1-x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=-1}$

$$S(0)=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{x}\ln(1-x)=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{x}\cdot(-x)=1$$

$$\Rightarrow S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1).\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

例：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数. 对上述例对照.

解：首先求收敛域 I

这里不再详细阐述.

$I=(-1,1)$.

接着求和函数，设为 $s(x)$.

即 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ ， $-1<x<1$

由 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$

即 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ ， $-1<x<1$.

显然这种类型的题目方法要简单些.

作业：P281

1 (2) (3) (5) (6) (8)

2 (2) (3) (4)

§12.4 函数展开成幂级数

在§12.3 例中，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1)$$

这个例子是已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，求其和函数。

在这一节里，则是考虑相反的问题，已知函数 $f(x)$ 现在寻找一个幂级数，在其收敛域内，和函数恰好为 $f(x)$ 如果能找到，则称函数 $f(x)$ 在级数收敛域内能展开成幂级数，并且称此幂级数为 $f(x)$ 的幂级数展开式。

例如，这里的函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$，其幂级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

即 $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad (-1<x<1)$$

一、泰勒级数的概念

由上册泰勒公式，有

若 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数，则对于该邻域内的任意一点，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个值。

若 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内存在任意阶导数，

由此可以导出一个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称之为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

设泰勒级数的收敛区间为 $|x-x_0|<R$，其中 R 为收敛半径

并且在 $|x-x_0|<R$ 内 $f(x)$ 具有任意阶导数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \qquad \text{(P282 定理)}$$

并且此时称泰勒级数为 $x-x_0$ 的幂级数展开式.

当 $x_0=0$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数，或者为 x 的幂级数展开式.

这一节的基本目的就是求 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

二. 函数展开成幂级数的方法

1. 直接法

即从定理 (P282) 的角度，需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

这种方法比较复杂，不做要求.

但要记住几个例子的结果.

① 例1.

P284 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

② 例2

P285 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$