微积分Ⅱ-2

期末考复习

如同半期考复习，依旧强调：

①复习时多做基础题，尽量不做难题（要考90分以上同学除外）

（原因在于基础题的方法具有普遍性，难题方法有特殊性，费时）

②没有考试重点，也即半期考之后讲过的所有章节都是考试范围，所有章节的基础题都要涉及到。

③不要只是看题，要动手去做题，要有一定的熟练度。

④复习时，可以限定在教材所讲章节对应的章节习题上

尽量不看其它教材，只用本教材及其对应习题全解指南。

复习时，只是概括性阐述每章的基本内容，

具体内容参见教材及当时板书叙述。

讲解一些习题，再次强调所讲解习题不是考试重点，

刚才已经说了“没有考试重点”。

第十二章　无穷级数

内容：§12.1 — §12.4

常数项级数
- §12.1　基本性质
  - 加减的结果
  - 从某一项起.
- §12.2　判别敛散性

§12.2
- 正项级数　(比较，比值．根值判别法)
- 一般常数项级数
  - → 比值．根值 ⇒
    - 绝对收敛
    - 发散
  - → 其它判别法 ⇒
    - 绝对收敛
    - 条件收敛　(莱布尼兹)
    - 发散

函数项级数

基本方法：转化为常数项级数的敛散性问题

只讲了一种特殊的函数项级数：

幂级数
- §12.3
  - 求收敛半径及收敛域
  - 运算
    - 加减法
    - 求导．求积分 ⇒ 求和函数
- §12.4　函数展开成幂级数 (间接法)

↓三个公式 (e^x, $\sin x$, $(1+x)^m$)

尽管我们没有讲如何求常数项级数的和，但考试可能涉及到.

例如，P329.10.

10. 求下列数项级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$

实际上此类题目可以转化为如下形式.

例如 10 (1) 转化为：

课堂练习

(i) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$ 的和函数,

(ii) 由 (i) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和.

解：(i) 先求收敛域

由 $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow R = +\infty$

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

再求和函数，设为 $S(x)$

即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{(n-1)!} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\right]'$

$$= \left[x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]' = (x e^{x})'$$

$$= e^{x} + x e^{x}$$

$$\Rightarrow s(x) = e^{x} + x e^{x}, \quad -\infty < x < +\infty$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = s(1) = 2e$

注：本道题在求幂级数的和函数时用到了 e^{x} 的幂级数展开式.

10(2) 转化为

(i) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的和函数

(ii) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和.

解：$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \cdot \cos x + \sin x\right]$$

$\Rightarrow \quad S(x) = \frac{1}{2}(x\cos x + \sin x), \qquad -\infty < x < +\infty$

(ii) $S(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 + \sin 1)$.

§12.1 : P258 : 1, 2, 3

§12.2 : P271 : 1, 2, 3, 4, 5

§12.3 : P281 : 1, 2

§12.4 : P289 : 2, 3, 4, 5, 6

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

第九章 多元函数微分法及其应用

内容：§9.5，§9.6，§9.8

§9.5 隐函数的求导公式

§9.6 几何应用 $\begin{cases} \text{一元向量值函数} \\ \text{空间曲线的切线与切平面} \\ \text{曲面的切平面与法线} \end{cases}$

§9.8 $\begin{cases} \text{极值．最值} \\ \text{条件极值} \end{cases}$

首先这部分内容直接与§9.1—§9.4联系

其次§9.6直接与第八章§8.3平面；§8.4空间直线

§8.5曲面；§8.6空间曲线

联系

§9.5 隐函数的求导公式

上课阐述时提到，本书所有公式都可以不必记。

做题时，区分所有的变量，哪些是因变量（可以一个或多个），哪些是自变量（可以一个或多个），因变量是这些自变量的函数

自变量哪一个是针对它求导的，其余的均看为常数．

习题 §9.5：P91–92 所有题目（包含打*）

上课有提过部分题目，参见当时板书！

§9.6 几何应用 $\begin{cases} \text{一元向量值函数} \\ \text{空间曲线的切线与切平面} \\ \text{曲面的切平面与法线} \end{cases}$

本节题目方法相对比较固定化.

比如 ① 空间曲线的切线与切平面

根据空间曲线的表示式:

参数方程时 如何处理?

一般方程时 如何处理?

② 曲面的切平面与法线

直接根据曲面的一般方程表示式.

习题: §9.6: P102-103 除第2题外所有习题

其中 11. 13 还需要用到 第八章 §8.1-§8.2.

§9.8 $\begin{cases} \text{极值. 最值} \\ \text{条件极值} \end{cases}$

实际问题可以简单处理, 也即唯一驻点为对应最值点

纯数学问题 还需判别二阶条件

习题: §9.8, P121-122 所有习题

依旧有部分习题 (8, 9, 11) 与第八章有关

第十章 重积分

内容：§10.1—§10.3

§10.1，§10.2 二重积分
§10.3 三重积分

二重积分：
- 直角坐标：X型、Y型
- 极坐标：θ型

→ 累次积分（也即求两次定积分）

所以很显然这一章节需要上册定积分、不定积分相关知识。

三重积分：建议只使用投影法，
将三重积分转化为二重积分，再采用直角坐标或极坐标
不论是直角坐标系还是柱面坐标系都如此。

习题

§10.1：P139~140：2、4、5、6

§10.2：P156-157：1—18

§10.3：P166-167：1—9，11(1)(3)，12(1)(3)(4)，14

第十一章 曲线积分与曲面积分

内容：§11.1—§11.3

$$
\begin{tikzcd}
\text{第一类曲线积分} \arrow[r] & \text{定积分} \\
\text{第二类曲线积分} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, "\text{格林公式}"'] & \text{二重积分} \arrow[u, "\text{累次积分}"']
\end{tikzcd}
$$

曲线积分与路径无关的等价条件.

《微积分Ⅱ-2》期末考

6月14日（星期三） 上午8:00—10:00

地点： 1# C202， C204

第十一章 曲线积分(与曲面积分)

内容：§11.1—§11.3

习题

§11.1 P193：3

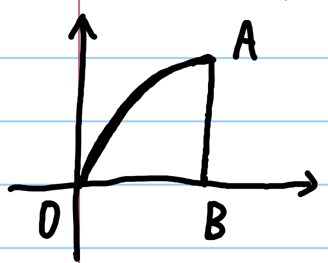
§11.2 P203-204：1, 2, 3, 4, 7, 8

§11.3 P216-217：1—8

P217

7. (4) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中L是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解： $y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2+x^2-2x+1=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$



由 $P=x^2-y$， $Q=-(x+\sin^2 y)$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 满足积分与路径无关的条件

因此 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

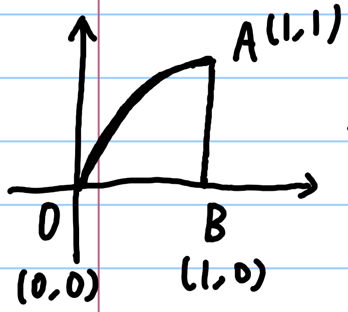
$$= \int_{OB}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy + \int_{BA}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

(上面等式实际上也是直接利用格林公式得到，

也即 $\oint_{OB\overset{\frown}{AO}} (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$\int_{OB}+\int_{BA}+\int_{L^-} = 0$

$\Rightarrow \int_{OB}+\int_{BA}-\int_{L}=0 \Rightarrow \int_L = \int_{OB}+\int_{BA}$)



$$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,0)} (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$+ \int_{(1,0)}^{(1,1)} (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

(具体的点的问题)

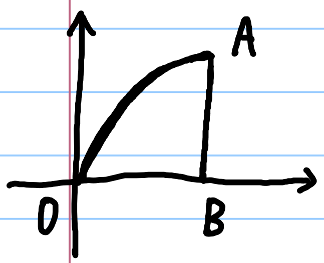
$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -(1+\sin^2 y)dy$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$$

继续回到题目本身：

$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中L是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧



考试时，不会提示用格林公式，也就是说，处理第二类曲线积分时，若用直接计算法（通过曲线参数方程转化为定积分）比较复杂时，可能可以用格林公式或者满足积分与路径无关的条件

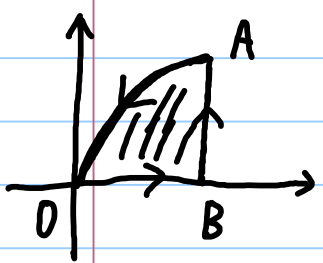
课后习题碰到的都是满足积分与路径无关的条件：

即 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

但也可能碰到其它情形，例如：

课堂练习：

$\int_L (x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.



解：$P=x^2-2y \quad Q=-(x+\sin^2 y)$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$

因此 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$，不满足积分与路径无关的条件.

方法一：采用格林公式. 此时闭曲线设为 $OB\overset{\frown}{AO}$，方向为逆时针.

由格林公式，则有

$$\oint_{OB\overset{\frown}{AO}} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D dxdy$$

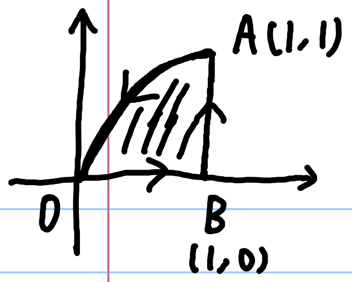
$$=\frac{1}{4}\pi$$，其中 D 为图示 $\frac{1}{4}$ 圆区域

（这种方法具有特殊性，闭曲线所围区域为规则图形，面积已知；且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 为某个非零常数）

于是有 $\int_{OB} Pdx+Qdy+\int_{BA} Pdx+Qdy+\int_{L^-} Pdx+Qdy=\frac{1}{4}\pi$

$$\int_{OB} Pdx+Qdy+\int_{BA} Pdx+Qdy-\int_L Pdx+Qdy=\frac{1}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy=\int_0^1 P(x,0)dx+\int_0^1 Q(1,y)dy-\frac{1}{4}\pi$$



$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -(1+\sin^2 y)\, dy - \frac{1}{4}\pi$

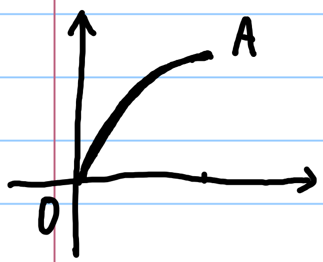
$= \cdots$

$= -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2 - \frac{1}{4}\pi$

方法二：$\int_L (x^2-2y)dx - (x+\sin^2 y)dy$

$= \int_L (x^2-y)dx - (x+\sin^2 y)dy - \int_L y\,dx$

前面部分就是习题本身，而 $\int_L y\,dx$ 直接采用第二类曲线积分的计算法，也即



考虑参数方程 $\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$

起点 O 对应参数 $x=0$

终点 A 对应参数 $x=1$

$\Rightarrow \int_L y\,dx = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi$

也即得到与方法一相同的结果.

复习时，需要对有指定方法的习题特别留意，

思考这些习题本身的特征，

当题目未指定方法时，可以迅速想到该方法.

考试纪律

答疑
- 新浪微博：@假说而已
- email: jianhualin@xmu.edu.cn (✓)